МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНИЙ МЕТОДИЧНИЙ КАБІНЕТ
З ВИЩОЇ МЕТОДИЧНОЇ ОСВІТИ
Українська медична стоматологічна академія

В.І.Пилипченко

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Полтава–2002

Використання елементів вищої математики в медико-біологічних дослідженнях: навчальний посібник включає основні теоретичні відомості по елементам вищої математики, теорії ймовірностей, математичної статистики. Наведені приклади розв'язків задач.

Може бути рекомендований студентам медичних вузів стоматологічних та медичних факультетів, аспірантам, пошукувачам.

Рецензент: **ДОЦЕНКО В.І.** – професор, доктор фіз.-мат. наук, зав. кафедрою біофізики, інформатики та медичної апаратури Української медичної стоматологічної академії.

Навчальний посібник "**Використання елементів вищої математики в медико-біологічних дослідженнях" (В.І.Пилипченко).**

Полтава: 2000 р., ст. , мал. – 12.

ПЕРЕДМОВА

Сучасна медицина широко використовує кількісний аналіз при вивченні різних процесів, що відбуваються в біосистемах. Елементарні функції можуть достатньо ефективно використовуватись для опису елементарних функціональних залежностей, що характеризують відношення біосистем до дій різних факторів. Використання арсеналу засобів математичного аналізу дає можливість дослідити функціональні залежності і одержати обгрунтовану медико-біологічну інформацію.

Математичне моделювання є невід’ємною частиною багатьох наукових досліджень. Дані, що одержуються при дослідженні біосистеми носять складний характер, змінюються внаслідок дії різних фізичних, хімічних, біологічних та інших факторів, що взаємодіють між собою. Для вияснення цих процесів потрібно мати багато даних і вміти ними управляти, мати точний і логічний метод аналізу. Біологічні зміни, що спостерігаються в біосистемах можна достатньо адекватно описати використовуючи методи теорії ймовірності та математичної статистики.

Ці методи широко використовуються при плануванні і обробці результатів дослідження експериментів у медицині, при машинній діагностиці.

Мета цих методичних вказівок – допомогти у використанні основ вищої математики, теорії ймовірності і математичної статистики при дослідженні біосистем. Теоретичний матеріал супроводжується розглядом прикладів, задач з медико-біологічним змістом.

1. ФУНКЦІЯ

У дослідженнях зустрічаються величини, які при даних умовах або навіть при будь-яких умовах мають те саме значення. Такі величини називають **сталими**. Якщо значення величини змінюється, то таку величину називають **змінною**.

Приклад 1. Нехай **R** – радіус кола, а **L** – довжина кола. Як відомо, довжина кола виражається формулою $\mathbf{L = 2\pi R}$, якщо тепер у цій формулі змінюється радіус кола **R**, то при цьому змінюватиметься і довжина кола **L**, а число $\boldsymbol{\pi}$, яке виражає відношення довжини кола до його діаметра, залишається сталим.

Отже, в даному прикладі ми зустрічалися із змінними величинами **R** і **L** та сталою величиною $\boldsymbol{\pi}$, причому вона залишається сталою при будь-яких умовах. Величини, які залишаються сталими при будь-яких умовах, називаються **абсолютно сталими**.

Приклад 2. Нехай під поршнем циліндра знаходиться певна маса газу (ідеального), температура якого не змінюється. За законом Бойля-Маріотта, об'єм **V** і тиск **P** цієї маси газу пов'язані співвідношенням **PV = C = const**.

У цій рівності при зміні, наприклад, об'єму **V** буде змінюватися і тиск **P**. Величина **C** при тій самій температурі залишається сталою. Але якщо змінювати температуру газу, змінюватиметься й **C**.

Сталі величини, які в умовах даної задачі залишаються незмінними, але при зміні умови задачі можуть змінюватися, називають **параметрами**.

Отже, в законі Бойля-Маріотта стала величина **C** є параметр. Прикладами сталих величин параметрів можуть бути ще такі величини, як коефіцієнт тертя, показник заломлення світла тощо.

Зауважимо, що та сама величина в одній задачі може бути сталою, а в другій – змінною. Так, наприклад, температура кипіння води є стала величина, якщо кипіння її відбувається в тому самому місці і при тих самих атмосферних умовах. Але температура кипіння стане величиною змінною, якщо кипіння відбувається в різних місцях і при різних атмосферних умовах.

Оскільки в природі та повсякденному житті зустрічаються сталі й змінні величини, то в математиці вивчають два види величини: сталі і змінні.

Сталі величини є предметом вивчення елементарної математики. Вища математика має своїм об'єктом вивчення змінні величини. Сталі величини, хоч і зустрічаються, проте мають другорядне значення. Як відомо, **змінні величини**, що спостерігаються в даному явищі чи процесі перебувають у тісному зв'язку, у певних залежностях. При цьому зміна одних величин приводить до зміни інших. Так, у прикладі 1 величини **R** і **L** пов'язані між собою формулою $\mathbf{L= 2\pi R}$, причому довжина кола **L** змінюється залежно від зміни радіуса **R**.

Можна навести приклади складнішої залежності, коли зустрічається більше ніж дві змінні величини.

Приклад 3. Нехай під поршнем циліндра знаходиться одна грам-молекула ідеального газу. Якщо температура цієї маси газу змінюється, то, як відомо, об'єм **V** і тиск **P** пов'язані з абсолютною температурою **T** законом Клапейрона-Менделєєва **PV = RT**, де з чотирьох величин величина **R** – стала (абсолютно стала), а решта величин можуть змінюватися. Зокрема, при зміні об'єму **V** і температури **T** буде змінюватися і тиск **P**.

У подальшому розглядатимемо простійший випадок залежностей, а саме, залежності між двома змінними величинами, якщо в таких залежностях абстрагуватися від конкретного змісту величин, то дістанемо залежності між математичними величинами. Тоді такі залежності називають **функціональними**.

У функціональних залежностях змінні величини відіграють неоднакову роль. Деякі з них змінюються довільно, а другі – залежно від зміни перших.

Змінні величини, значення яких в умовах даної задачі можуть вибиратися довільно, називаються **незалежними змінними, або аргументами**.

Змінна величина, значення якої залежить від зміни значень аргументу, називається залежно змінною, або **функцією**.

Якщо незалежних змінних є одна, то функція називається функцією однієї змінної. Якщо незалежних змінних є дві, то функція називається функцією двох змінних і т. п. Так, ***у прикладі 1*** змінна **R** є аргумент, а **L** є функція. ***У прикладі 2*** **V** – аргумент, **P** – функція, причому в обох прикладах **L** і **P** є функції однієї змінної. ***У прикладі 3*** **V**, **T** – аргументи, **P** – функція. Тут **P** є функція двох змінних.

Зазначимо, що в усіх розглянутих прикладах ми для кожного значення незалежної змінної можемо вказати цілком конкретне значення залежної змінної. Саме такі залежні величини називають функціями. Проте є й такі величини, які залежать від інших величин, але про їх числове значення нічого не можна сказати, якщо незалежним змінним надавати певних значень. Так, наприклад, залежність між урожайністю зернової культури і кількістю опадів. Такого роду величини не є функціями.

Отже, нехай маємо дві змінні величини **x** і **y**. Тоді змінна величина **y** називається функцією змінної величини **x**, якщо кожному значенню величини **x** відповідає одне значення величини **y**.

Символічно записується **y = f(x)** і читають **"ігрек дорівнює еф від ікс"**.

Проте у природі і в техніці зустрічаються випадки, коли явища і процеси описуються більше ніж двома величинами. Отже доводиться мати справу з функціями, в яких незалежних змінних є відповідно дві, три т. д., взагалі, кажучи **n**. Такі функції називаються функціями кількох змінних **y = f(x, z, t)**.

Для позначення функції іноді вживають і інші букви: **F**,**Φ**, **Ψ** і т.д. Різні букви вживають тоді, коли розглядають кілька функції від того самого аргументу. Функція називається **явною**, якщо формула, по якій визначається функція, указує математичні операції, які проводяться над аргументом для визначення функції **y**, в противному разі вона називається **неявною** функцією: $\mathbf{y = ax^2}$; $\mathbf{y = f(x)}$ – явні функції; $\mathbf{y^2 - x = 0}$; $\mathbf{F(x, y) = 0}$ – неявні функції. Функції можуть бути **парні** і **непарні**, **періодичні**, **зростаюча** і **незростаюча**.

Способи задання функції

Функція $\mathbf{y = f(x)}$ буде задана коли:

1) задано область **x** визначення функції, тобто множину зміни аргументу **x**;
2) задано закон (правило), за яким встановлюється відповідність між елементами **x** і **y**.

У математиці існує чотири способи задання функцій.

Аналітичний спосіб. Це такій спосіб, коли функціональну залежність між **x** і **y** можна виразити за допомогою деякого аналітичного виразу або формули. Ця формула і вказує на те, які дії (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до ступеня, добування кореня, логарифмування, знаходження значень тригонометричних функцій тощо) і в якому порядку треба виконати над сталими числами і аргументом **x**, щоб для кожного його значення дістати цілком певне одне значення **y**.

Приклади функцій, які ми наводили, це і є аналітично задані функції.

Іноді функцію можна задати кількома формулами. Так, наприклад,

$$\mathbf{y} = |x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Цю функцію задамо двома формулами: для $\mathbf{x \geq 0}$ її задаємо формулою $\mathbf{y = x}$, а для $\mathbf{x \leq 0}$ – формулою $\mathbf{y = -x}$.

Зазначимо, що при цьому ми маємо одну функцію, але на різних проміжках вона задається різними формулами.

Кожний аналітичний вираз, який містить **x**, має свою **область існування** – це сукупність допустимих дійсних значень **x**, при яких заданий вираз набуває дійсних значень. Тому для функцій, які задано аналітично, розрізняють **область визначення** функції і **область її існування**.

Під областю існування аналітично заданої функції розуміють область існування відповідного аналітичного виразу. Проте в тих випадках, коли величини, які містяться в аналітичному виразі, мають певний фізичний або геометричний зміст, область існування функції може не збігатись з областю її визначення.

Приклад 4. Якщо через **x** позначити радіус кола, а через **y** – його площу, то матимемо функціональну залежність, яка виразиться формулою:

$$\mathbf{y = \pi x^2}.$$

Тут область визначення функції є множина всіх додатних дійсних чисел, а область існування функції – вся множина дійсних чисел. Функція може бути задана в інтервалі **[a;b]** або на відрізку.

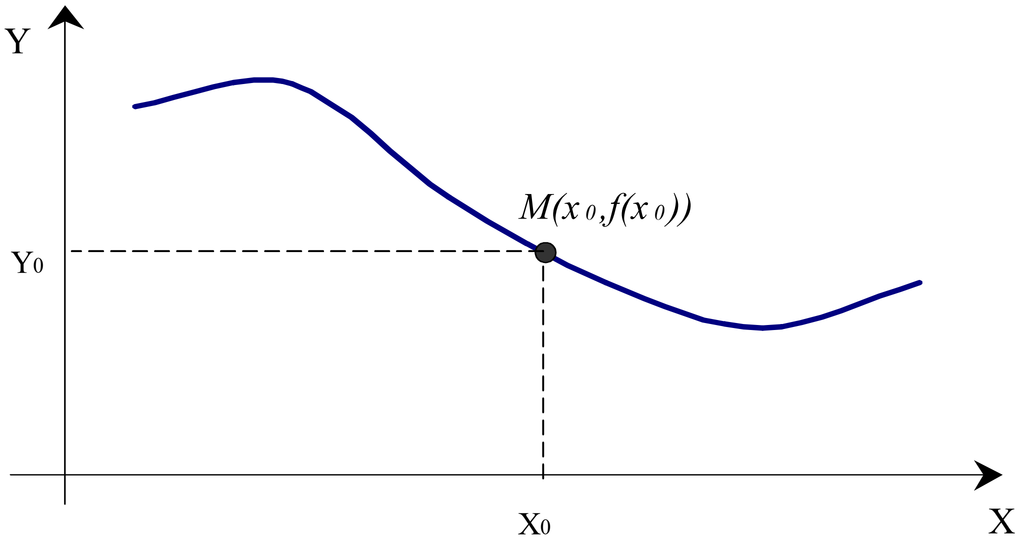
Словесний спосіб. Часто закон відповідності між елементами двох множин описується за допомогою слів. Такий спосіб задавання функції називається словесним.

Прикладом такої функції може бути функція **y = sgn(x)** (від латинського слова signum **"сигнум"**, що означає **"знак"**).

Ця функція задається так: $\mathbf{y = sgn(x) =} \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \\ -1, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Тут кожному числу **x>0** ставиться у відповідність число **1**, числу **x = 0** – число нуль і кожному числу **x<0** – число – **1**. Отже, кожному дійсному числу ставиться у відповідність одне дійсне число.

Графічний спосіб. Функцію можна задати також графічно. Справді, візьмемо Декартову систему координат (мал.1).



Мал.1

Тоді для кожного значення **x**, яке належить області визначення функції, у площині **xoy** можна побудувати точку **M** з координатами $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{f(x_0)}$. Сукупність точок **M(x; f(x))** називають геометричним зображенням, або графіком функції **y = f (x)**. У загальному випадку це буде якась лінія. Функція вважається заданою графічно, якщо задано її графік.

Табличний спосіб. При експериментальних дослідженнях та спостереженнях залежність між величинами дуже часто подається у вигляді таблиць. Такий спосіб задання функції називається **табличним**. При табличному способі різним значенням аргументу відповідають певні значення функції. Прикладами табличного задавання функції можуть бути таблиці десяткових логарифмів, таблиці значень тригонометричних функцій, таблиці реєстрації температури хворого протягом дня тощо.

Найчастіше табличним заданням функції користуються в медицині і біології, а саме тоді, коли закон залежності між величинами існує, але невідомий. У цьому разі проводять експеримент, за допомогою якого дістають ряд значень аргументу та відповідних значень функції. Одержані результати записують у вигляді таблиць. Таблиці не будуть точно відображати функціональну залежність, тому що при вимірюванні, хочемо ми того чи ні, матимуть місце похибки, які залежать від класу точності приладів. У цьому полягає недолік табличного задання функції. Крім того, недолік табличного способу полягає ще й в тому, що ми можемо знайти в таблиці не всі, а лише окремі значення функції.

Проте табличний спосіб зручний тим, що при такому завданні ми без будь-яких обчислень маємо окремі значення функції. А це дуже важливо; іноді навіть функції, задані іншими способами, наприклад аналітично, зображають у вигляді таблиць. Такі таблиці широко використовуються на практиці в медицині.

Крім того, за допомогою таблиць, методом лінійної інтерполяції можна, хоч і наближено, знайти ті значення функції, яких немає і в таблиці. І, нарешті, при табличному заданні легко будувати графіки функції, особливо тоді, коли графік будується по точках.

Класифікація функцій

Функції, задані аналітично, можуть бути утворені з невеликої кількості функцій, які називаються основними або простішими елементарними функціями. До основних елементарних функцій належать такі:

1. Степенева: $y = x^n$ (n – дійсне число).

2. Показникова: $y = a^x$ ($a>0$, $a \neq 1$).

3. Логарифмічна: $y = \log_a x$ ($a>0$, $a \neq 1$).

4. Тригонометрична: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

6. Стала: $y = C$.

Решта функцій утворюється із основних елементарних функцій двома способами:

- за допомогою арифметичних дій: додавання, віднімання, множення, ділення над основними функціями та числами, наприклад:

$$y = \frac{\operatorname{tg}x + 2^x - e^x}{\arcsin x + 5\lg x + x^7};$$

$$y = \ln x \cdot \cos x + 7\sin x;$$

$$y = 8\operatorname{ctg}x - \frac{1}{4}x^9 \cdot \log_3 x.$$

- за допомогою суперпозиції кількох основних функцій. При такому способі завданні функції аргумент основної елементарної функції є, у свою чергу, основна елементарна функція, яку виражено через основні елементарні функції. Наприклад, $y = \sin^2 x$; $y = 3^{\sin x}$; $y = \ln(\cos x)$.

Функція, яку утворено за допомогою суперпозиції основних елементарних функцій, називається складною функцією, або функцією від функції. У загальному випадку функції записуються $y = f(u)$, $u = f(x)$ або $y = f(u(x))$.

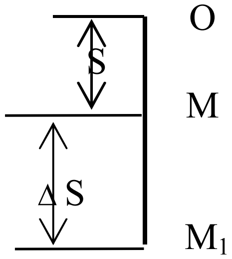
2. ПОХІДНА. МЕХАНІЧНИЙ ТА ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякому інтервалі **[a;b]**. Візьмемо довільну точку $x_0 \in [a;b]$ і надамо $\mathbf{x_0}$ довільного приросту $\Delta \mathbf{x}$ (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точки x_0 і $x_0+\Delta x$ належали інтервалу **[a;b]**. Обчислимо в точці приріст функції $\Delta \mathbf{y}$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення. Якщо існує границя відношення приросту функції $\Delta \mathbf{y}$ до приросту аргументу $\Delta \mathbf{x}$ при умові, що $\Delta \mathbf{x}$ прямує до нуля, тобто

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то границя називається похідною від функції **f(x)** в точці $\mathbf{x = x_0}$ і позначається символом $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Для похідної застосовують також і такі позначення: $\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{df(x)}{dx}$. Поставимо задачу: обчислити швидкість руху точки в момент часу **t**, якщо точка знаходиться в положенні **M** (мал. 2).



Мал. 2

Крім моменту часу **t** розглянемо момент часу $t+\Delta t\,(\Delta t > 0)$. Нехай у момент часу $t+\Delta t$ рухома точка знаходиться в положенні $\mathbf{M_1}$. Тоді за час $\Delta \mathbf{t}$ точка пройде шлях, який позначимо $\Delta \mathbf{S}$ і називатимемо приростом шляху, цей шлях дорівнює довжині відрізка $|\mathbf{MM_1}|$. За формулою обчислимо приріст $\Delta\mathbf{S}$: $\Delta S = \dfrac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \dfrac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \dfrac{g\Delta t^2}{2}$, тоді $v_c = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \dfrac{g\Delta t}{2}$.

Отже, на відміну від рівномірного руху, середня швидкість у випадку, що розглядається, вже є сталою. Вона при фіксованому моменті часу **t** залежить від приросту часу Δ **t**. При різних значеннях Δ **t** середня швидкість $\mathbf{v_c}$ набуває різних значень.

Проте чим менший проміжок часу Δt після моменту часу **t**, тим, очевидно, середня швидкість буде точніше характеризувати швидкість точки в момент **t**. Тому природно за швидкість точки в момент часу **t** прийняти границю $\mathbf{v_c}$ при $\Delta t \to \mathbf{0}$. Швидкістю **v** точки в момент часу **t** називається границя середньої швидкості $\mathbf{v_c}$ на проміжку часу Δ **t**, коли Δ**t** прямує до нуля $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_c = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (gt + \frac{g\Delta t}{2}) = gt$.

Отже, швидкість точки в момент **t**, що вільно падає, дорівнює: v = gt.

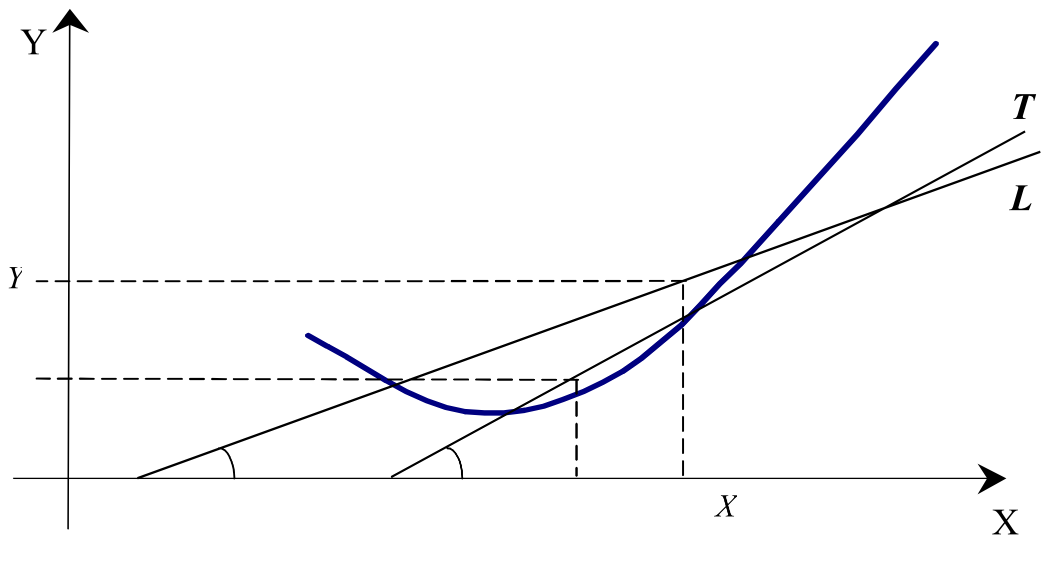
Якщо врахувати, що s = f(t) то $v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Знайдемо приріст шляху Δ **S**. Для цього часу **t** надамо приріст Δ **t**. Тоді дістанемо вираз для приросту шляху $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$.

Підставивши: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

Зазначимо, що дана формула дає змогу знайти швидкість у момент часу **t** тільки тоді, коли існує границя цього відношення. Якщо границя цього відношення при якомусь певному значенні **t** не існує, то кажуть, що рухома точка в цей момент часу швидкості не має.

Розглянемо випадок, коли довільна крива Δ **L** буде задана в декартовій системі координат рівнянням **y = f(x)**, де **f(x)** – неперервна функція на деякому проміжку **[a; b]**. Нехай графік цієї функції має вигляд зображений на мал. 3.



Мал. 3

Візьмемо на кривій точку $\mathbf{M_0}$ з координатами ($\mathbf{x_0}$, $\mathbf{y_0}$) і точку $\mathbf{M_1}$ з координатами $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$ (де Δx і Δy відповідно прирости **x** і **y**, вони можуть бути і від'ємними числами). Через точку M_0 і M_1 проведемо січну M_0M_1 і продовжимо її до перетину з віссю **Ox**. Кут, який утворює січна M_0M_1 з додатним напрямом осі **Ox** позначимо через **β**. Тоді $tg\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо точка M_1 прямує вздовж кривої **L** до злиття з точкою M_0, то координати точки $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ наближаються як завгодно близько відповідно до координат точки $M_0\,(x_0; y_0)$, тобто $\lim\limits_{M_1 \to M_0} = (x_0 + \Delta x) = x_0$,

$$\lim_{M_1 \to M_0} (y_0 + \Delta y) = y_0.$$

Із співвідношень випливає, що $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, якщо точка $M_1 \to M_0$.

Нехай тепер $\Delta x \to 0$. Тоді й $\Delta y \to 0$ (внаслідок неперервності функції **f(x)**, а отже, точка $M_1 \to M_0$. Таким чином, у даному випадку однієї умови $\Delta x \to 0$ необхідно і достатньо, щоб $M_1 \to M_0$.

Припустимо, що розглянута крива в точці M_0 має дотичну M_0T і утворює з напрямком осі **Ox** кут **α**. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної M_0T дорівнює **tgα**. Якщо $\Delta x \to 0$, то кут **β** прямує до **α**. Отже, внаслідок неперервності тангенса $tg\beta \to tg\alpha$, проте $tg\ \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тому ми приходимо до такого співвідношення $tg\ \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

З даних міркувань випливає такий критерій існування дотичної до кривої. Для того щоб крива $y = f(x)$, де **f(x)** – неперервна на проміжку **[a,b]** функція мала в точці M_0 дотичну, необхідно і достатньо, щоб існувала границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Приклад: Довести, що дотичною до параболи $y = x^2$ в точці $M_0(0,0)$ є вісь абсцис.

Визначимо спочатку кутовий коефіцієнт дотичної, користуючись співвідношенням $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Для цього знаходимо приріст функції $f(x)=x^2$ у точці $x_0=0$. Нагадаємо, що приріст за визначається формулою:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),\ \text{де}\ \Delta x = x - x_0 \text{ – приріст аргументу.}$$

У даному випадку $\Delta y = \Delta x^2$, тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = \Delta x$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

Отже, кутовий коефіцієнт **k** дотичної до параболи $y=x^2$ в точці $M_0(0;0)$ існує і дорівнює нулю, тобто **k=0**. Підставляючи значення $x_0=0$, $y_0=0$, $k=0$ дістанемо рівняння дотичної **y=0**, а це рівняння є рівнянням осі абсцис.

Геометричний зміст похідної випливає із задачі про дотичну. Кутовий коефіцієнт **tgα** дотичної **x**, проведений до кривої в точці з координатами x_0,

$y_0 = f(x_0)$ дорівнює похідній $f'(x_0)$.

Правило знаходження похідної

Щоб знайти похідну від функції **f(x)** у даній точці $\mathbf{x_0}$, треба:

■ значенню $\mathbf{x_0}$ надати довільного приросту $\Delta \mathbf{x}$, тобто ввести до розгляду точку $x_0 + \Delta x$;

■ знайти приріст $\Delta \mathbf{y}$ функції у точці $\mathbf{x_0}$;

■ знайти відношення: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

■ знайти границю відношення: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Якщо дана границя існує, то вона й дорівнює похідній $\mathbf{f'(x_0)}$. Зауважимо, що коли похідну треба знайти у будь-якій точці **x(a;b)**, то правило залишається те саме, тільки замість $\mathbf{x_0}$ скрізь ставимо **x**.

Приклади

1. Знайти похідну від функції $y = x^3 + x^2 + 4x + 1$ у точці $x_0 = 0$.

Знаходимо приріст Δy у точці $x_0 = 0$; $\Delta y = \Delta x^3 + \Delta x^2 + 4\Delta x$, тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x^3 + \Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = \Delta x^2 + \Delta x + 4.$$

Обчислимо границю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x^2 + \Delta x + 4) = 4$.

Отже, похідна від функції $y = x^3 + x^2 + 4x + 1$ у точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює 4, тобто $f'(x) = 4$.

2. Знайти похідну від функції: $y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \neq 0 \\ 0, \text{ якщо } x = 0 \end{cases}$ у точці $x_0 = 0$.

Знаходимо приріст Δy у точці $x_0 = 0$, $\Delta y = \Delta x^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x}$, тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 0.$$

Отже, похідна від функції у точці $\mathbf{x_0 = 0}$ існує і дорівнює нулю $\mathbf{f'(0) = 0}$.

Функція **f(x)** в точці $\mathbf{x_0}$ називається диференційованою, якщо в цій точці вона має похідну $\mathbf{f'(x_0)}$.

Теореми

1. Похідна від суми.

Якщо функція $\mathbf{f_1(x)}$, $\mathbf{f_2(x)}$ в точці **x** мають похідні, то функція $y(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$ також в цій точці має похідну і похідна $\mathbf{y'(x)}$ дорівнює:

$$y'=f'(x)\pm f_2'(x).$$

2. Похідна від добутку.

Якщо функції $\mathbf{f_1(x), f_2(x)}$ в точці **x** мають похідні, то в цій точці функція $y=f_1(x)\cdot f_2(x)$ також має похідну, яка дорівнює:

$$y'(x)=f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x).$$

3. Похідна від частки.

Якщо функція $f_1(x)$, $f_2(x)$ в точці **x** мають похідні і $f_2(x)\neq 0$, то функція $y=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також у точці **x** має похідну $\mathbf{y'}$ і похідна дорівнює:

$$y'=\frac{f_2(x)\cdot f_1'(x)-f_1(x)\cdot f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

4. Похідна від складної функції.

Нехай маємо складну функцію $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ і нехай:

1) зовнішня функція $f(u)$ в точці $u_0=\varphi(x_0)$ має похідну (по **u**), $y'_u=f'_u(u_0)$;

2) внутрішня функція $u=\varphi(x)$ в точці $\mathbf{x_0}$ має похідну (по **x**) $u'_x=\varphi'(x_0)$.

Тоді складна функція $y=f[\varphi(x)]$ в точці x_0 також має похідну (по **x**), яка дорівнює добутку з похідної від зовнішньої функції f(u) і похідної від внутрішньої функції $\varphi\,\mathbf{(x)}$, тобто $f'_x(\varphi(x_0))=f'_u(u)\cdot\varphi'(x_0)$ або $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Користуючись основною таблицею похідних та теоремами знаходять похідні від функцій, які утворені за допомогою арифметичних операцій та суперпозиції над основними елементарними функціями.

Для знаходження похідних елементарних функцій користуються формулами:

y	**y′**	**y**	**y′**
c	0	cos x	– sin x
x^{μ}	$\mu x^{\mu-1}$	tg x	$\sec^2 x$
x	1	ctg x	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	arcsin x	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	arccos x	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

y	**y′**	**y**	**y′**
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	arctg x	$\dfrac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$	arcctg x	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\log_a x$	$\dfrac{\log_a e}{x}$
sin x	cos x	ln x	$\dfrac{1}{x}$

Приклади

Знайти похідну:

1. $y = e^x - \ln x + \arcsin x + \sqrt[3]{x}$.

$$y' = (e^x - \ln x + \arcsin x + \sqrt[3]{x})' = (e^x)' - (\ln x)' + (\arcsin x)' + (\sqrt[3]{x})' =$$

$$= e^x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

2. $y = 2^x \sin x$. $y' = 2^x (\sin x)' + \sin x\, (2^x)' = 2^x \cos x + \sin x\, 2^x \ln 2$;

3. $y = \dfrac{x^2+1}{x^4+2}$.

$$y' = \frac{(x^4+2)(x^2+1)' - (x^2+1)(x^4+2)'}{(x^4+2)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^4+2) - 4x^3(x^2+1)}{(x^4+2)^2} = \frac{2x(2 - x^4 - 2x)}{(x^4+2)^2}.$$

4. $y = \sin x^2$. Введемо $u = x^2$, $y = \sin u$.

$$y' = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x = (\cos x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2 .$$

5. $y = e^{tg^2 x}$. Введемо позначення $v = tgx$, $u = v^2$, тоді матимемо складну функцію виду $y=e^u$, $u=v^2$, $v=tgx$. Отже, $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = e^4 \cdot 2v \cdot \sec^2 x$.

Підставляючи значення **u** і **v** матимемо $y' = 2e^{tg^2 x} \cdot tgx \cdot \sec^2 x$.

Похідні вищих порядків

Для досліджування функцій, обчислення прискорення, часто приходиться обчислювати похідну другого порядку.

Щоб знайти похідну другого порядку від функції $y = f(x)$, треба знайти спочатку від цієї функції похідну першого порядку **y′**, а потім від похідної **y′** знайти ще похідну першого порядку. Інакше кажучи, щоб знайти другу похідну, треба функцію продиференціювати два рази. Похідна другого порядку позначається одним із таких символів **y″**; **f″(x₀)**; $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$; D^2y; $D^2f(x_0)$.

Аналогічно випливає правило знаходження похідних третього, четвертого і т.д. порядків.

Приклади

1. Знайти y'' від функції $y = x^3+5x^2+4x+3$.

Знаходимо $y' = 3x^2+10x+4$, потім $y'' = 6x+10$.

2. Знайти y'' від функції $y = e^{x^2}$.

Знаходимо $y' = 2e^{x^2}\cdot x$, потім $y'' = 4e^{x^2}\cdot x^2 + 2e^{x^2}$.

Знаходимо похідну третього порядку:

$y''' = 8e^{x^2}\cdot x^3 + 8e^{x^2}\cdot x + 4e^{x^2}\cdot x = 4xe^{x^2}\cdot(2x^2+3)$.

3. Знайти похідну шостого порядку від функції

$y = x^6+5x^5+4x^4$.

Послідовно одну за одною знаходимо похідні:

$y' = 6x^5+25x^4+16x^3$.

$y'' = 30x^4+100x^3+48x^2$.

$y''' = 120x^3+300x^2+96x$.

$y'''' = 360x^2+600x+96$.

$y''''' = 720x+600$.

$y'''''' = 720$.

Загальна схема дослідження функції та побудова графіка

Нехай на відрізку [**a, b**] задана неперервна функція **y= f(x)**. Графіком цієї функції є деяка лінія. Виникає запитання: як побудувати цей графік?

Для побудови графіка функції, треба провести дослідження, до якого входить:

- знаходження області існування функції. Це дає змогу визначити ті точки осі абсцис, над якими пройде графік функції, а над якими ні.
- знаходження точок перетину графіка з координатними вісями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}.$$

Перша система дає точки перетину з віссю **0x**, а друга з віссю **0y**.

- дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.

  Розв'язування цього питання полегшить побудову графіка в тому розумінні, що побудову доведеться виконувати не в усій області існування функції, а тільки в її частині. Так, якщо **f(x)** періодична функція з періодом **T>0**, то графік досить побудувати на відрізку числової вісі, довжина якою дорівнює **T**, а потім цю частину графіка повторити на кожному відрізку довжини **T**. Якщо функція парна, то графік функції симетричний відносно вісі **0y**, якщо непарна – то відносно початку координат. Тому достатньо побудувати графік тільки при **x>0**, а потім симетрично відобразити його і на від'ємні **x**.

Знайти точки розриву функції та дослідити їх характер. Знання характеру точок розриву допоможе встановити вигляд графіка функції поблизу цих точок.

- знайти значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція. Якщо область існування функції є інтервал (півінтервал) або кілька інтервалів (півінтервалів), то треба знайти граничне значення функції, коли **x** наближається до одного з кінців розглядуваних проміжків.
- знайти інтервали монотонності функції. Тоді ми знайдемо, де графік піднімається догори, а де опускається донизу.
- знайти екстремальні точки і побудувати їх на площині.
- знайти інтервали вогнутості та опуклості кривої, яка є графіком функції.
- знайти точки перетину і побудувати їх на площині.
- знайти асимптоти графіка функції.
- на основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію і побудувати графік: $y = 2x^4 - x^2 + 1$.

Розв'язування

Досліджуємо функцію за наведеною схемою.

1. Функція є многочлен, область існування якого є вся множина дійсних чисел, тобто інтервал $]-\infty,+\infty[$.

2. Знаходимо точки перетину графіка з координатними вісями. При перетинні з віссю **0x (y=0)** маємо рівняння $2x^4 - x^2 + 1 = 0$. Це рівняння дійсних коренів не має, тобто крива вісь **0x** не перетинає. Для знаходження точок перетину графіка з віссю **0y** покладемо **x=0**. Маємо **y=1**. Отже, в точці $\mathbf{M_1(0,1)}$ графік функції перетинає вісь **0y**.

3. Функція не періодична, але парна. У подальшому досліджуватимемо функцію тільки при $x \geq 0$.

4. Многочлен є функція, неперервна по всій числовій вісі. Точок розриву не має.

5. Досліджуємо функцію на кінцях інтервалів. У точці **x = 0**, маємо **y = 1**. Знаходимо $\lim\limits_{x\to 0} = \lim\limits_{x\to 0}(2x^4 - x^2 + 1) = +\infty$.

6. Для знаходження інтервалів монотонності треба розв'язати нерівності $\mathbf{y' > 0}$, $\mathbf{y' < 0}$. У точках, де $\mathbf{y' > 0}$, функція зростає, а де $\mathbf{y' < 0}$, – спадає. Обчислимо похідну першого порядку $y' = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) > 0$, $x(4x^2 - 1) > 0$.

Оскільки **x>0**, то $4x^2-1>0$, звідси $x^2>\frac{1}{4}$, або $x>\frac{1}{2}$. Отже, в інтервалі $]\frac{1}{2}, +\infty[$ функція зростає, тоді в інтервалі $]0; \frac{1}{2}[$ – спадає.

7. Досліджуємо функцію на екстремум. Для цього прирівнюємо першу похідну до нуля $x(4x^2-1) = 0$. Дістанемо такі стаціонарні точки: $\mathbf{x_1=0}$; $\mathbf{x_2}=\frac{1}{2}$ (від'ємних значень **x** не розглядаємо). Точок, в яких $\mathbf{y'}$ не існує, не має. Знайдемо похідну другого порядку $y'' = 24x^2-2 = 2(12x^2-1)$. Тоді $f''(0) = -2<0$, $f''(\frac{1}{2}) = 4>0$. Отже, **x=0** є точка максимуму, а $\mathbf{x_2}=\frac{1}{2}$ – точка мінімуму, причому $y_{max} = f(0)=1$. $y_{min}=f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$. Таким чином, точки $\mathbf{M_1(0;1)}$, $\mathbf{M_2(}\frac{1}{2};\frac{7}{8}\mathbf{)}$ є екстремальні точки.

8. Знаходимо інтервали вогнутості та опуклості графіка. Розв'язуємо нерівність $\mathbf{y''>0}$. $2(12x^2-1)>0$, $12x^2-1>0$, $x^2>\frac{1}{12}$, $x>\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Отже, в інтервалі $]\frac{1}{2\sqrt{3}}; +\infty[$ крива вогнута, а в інтервалі $]0; \frac{1}{2\sqrt{3}}[$ – опукла.

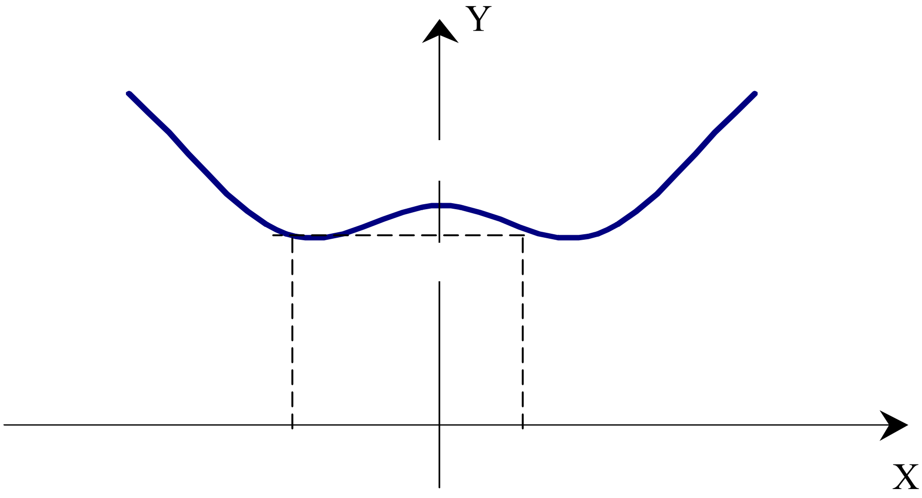
9. Знаходимо точки перетину. Для цього другу похідну прирівнюємо до нуля $2(12x^2-1) = 0$. Беремо додатковий корінь $x_2 =\frac{1}{2\sqrt{3}}$. При переході **x** через точку $\mathbf{x_3}$, як це випливає з попереднього пункту, $\mathbf{y''}$ змінює знак з "–" на "+". Отже, $\mathbf{x_3}$ є абсцисою точки перетину. Знайдемо $f(x_3)=\frac{67}{72}$. Точка $M_3(\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{67}{72})$ є точкою перетину кривої.

10. Знаходимо асимптоти. Вертикальних асимптот крива не має, бо f(x) не має точок розриву. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти. Знаходимо границю $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2x^4 - x^2 + 1)}{x}$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^4 - x^2 + 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} y^I = \lim_{x\to+\infty} (8x^3 - 2x) = +\infty .$$

Отже, крива не має і похилих асимптот (мал.4).

Графік заданої функції



Мал.4

3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

По означенню,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

При $\Delta x \to 0$ відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є змінною величиною і, як будь-яка змінна, що має границю, відрізняється від своєї границі $f'(x)$ на величину нескінченно малу, наприклад, α:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

Звідси випливає, що довільному приросту Δx в точці x відповідає приріст функції

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Добуток $f'(x)\Delta x$ є головною частиною приросту функції і отримало назву - диференціал функції. Диференціал функції y=f(x) позначається символом dy, або df(x).

Означення. Диференціалом функції називається добуток похідної на довільний приріст аргумента.

$$dy = f'(x) * \Delta x.$$

Для одержання значення диференціалу функції необхідно знати два числа: початкове значення аргумента x і його приріст Δx.

Користуючись співвідношенням dy=y′dx складемо таблицю для диференціалів від елементарних функцій:

1.	$y = c = const$	$dy = 0$
2.	$y = x^{\mu}$	$dy = \mu x^{\mu-1}dx$
3.	$y = x$	$dy = dx$
4.	$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{1}{x^2}\, dx$
5.	$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
6.	$y = \sqrt[n]{x}$	$dy = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
7.	$e = a^x$	$dy = a^x lnxdx$
8.	$y = e^x$	$dy = e^x dx$
9.	$y = log_a x$	$dy = \log_a e\frac{dx}{x}$
10.	$y = lnx$	$dy = \frac{dx}{x}$
11.	$y = sinx$	$dy = cosxdx$
12.	$e = cosx$	$dy = -sindx$
13.	$y = tgx$	$dy = sec^2 xdx$
14.	$y = ctgx$	$dy = -cos^2 xdx$
15.	$y = arcsinx$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
16.	$y = arccosx$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$y = arctgx$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
18.	$y = arcctgx$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

Приклади

1. Знайти диференціал від функції y = sinx в точці $\frac{\pi}{4}$.

Розв'язування

dy=(sinx)′dx

dy = cosxdx. Підставим тепер замість **x** величину $\frac{\pi}{4}$: $dy=\cos\frac{\pi}{4}dx$

$dy = \frac{\sqrt{2}}{2}dx.$

2. Знайти диференціл від функції $y = \sin^2\sqrt{x} + e^{tgx}$ в довільній точці **x**.

Розв'язування

$$dy = y'dx = (\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\ \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{tgx}\sec^2 x)dx.$$

Диференціал функції використовується для обчислення наближених значень функції та підрахунку похибок при дослідженнях.

Приклад: знайти наближене значення $\sqrt{1{,}001}$.

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$.

Нехай $x_0=1$, $\Delta x=0{,}001$, тоді $\sqrt{1{,}001}$ можна зобразити так: $\sqrt{1{,}001} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$. Отже, можна використати формулу $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$. Для цього треба знайти $f(x_0) = f(1)$, $f'(x_0) = f'(1)$. Маємо $f(1)=\sqrt{1}=1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(1) = \frac{1}{2}$. Тоді $\sqrt{1{,}001} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}001 = 1{,}0005$.

Використання диференціалу функції для підрахунку похибок буде розглянуто в відповідному розділі.

Невизначений інтеграл

Основна задача диференціального числення полягає в тому, щоб від заданої функції **f(x)** знайти її похідну **f′(x)**. Проте на практиці доводиться частіше розв'язувати обернені задачі, коли відома похідна, а потрібно знайти функцію.

Отже, з чисто математичної точки зору ми дістаємо таку задачу. На деякому проміжку **(a;b)** задано функцію **f(x).** Треба знайти таку функцію **F(x)**, щоб похідна **F′(x)** в кожній внутрішній точці проміжку **(a;b)** дорівнювала б **f(x)**; тобто $F'(x) = f(x)$.

Функція **F(x)** на проміжку **(a; b)** називається первісною для функції **f(x)**, якщо **F(x)** на проміжку **(a; b)** є неперервною, а в кожній внутрішній точці проміжку **(a;b)** **F(x)** є диференційованою і $F'(x) = f(x)$. Інакше кажучи, якщо **F(x)** – первісна функція для **f(x)**, то множина всіх первісних функцій для функції **f(x)** записується рівність $F'(x) = f(x)+c$, в якій **c** – довільне стале число. Множина всіх первісних функцій для функції **f(x)** називається **невизначеним інтегралом** і позначається $\int f(x)dx$. При цьому **F(x)** називається **підінтегральною функцією**, а **f(x)dx** – **підінтегральним виразом**. Отже, якщо **F(x)** є первісною для **f(x)**, то $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Знаходження невизначеного інтегралу для функції **f(x)** називається **інтегруванням даної функції**.

Розділ математичного аналізу, в якому вивчаються способи інтегрування функцій, називається **інтегральним численням**.

Властивості невизначеного інтегралу

1. Послідовне виконання операції диференціювання та інтегрування в будь-якому порядку з точністю до довільної сталої приводить до початкової функції d($\int$ f(x)dx)= f(x)dx, $\int$(dF(x)) = F(x)+c. Розглянуту властивість можна сформулювати ще так: операції диференціювання та інтегрування з точністю до сталої є взаємно обернені.
2. Якщо число $\mathbf{a \neq 0}$, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$. Дана властивість формулюється так: сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтегралу.
3. Невизначений інтеграл від суми (різниці) функції дорівнює сумі (різниці) невизначених інтегралів від кожної функції:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Основна таблиця інтегралів

1.	$\int 0 \cdot dx = c$
2.	$\int 1dx = x + c$
3.	$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{n+1} = c(n \neq -1)$
4.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + c$
5.	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + c$
6.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
7.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$; $\int e^x dx = e^{x+c}$
8.	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
9.	$\int \cos x dx = \sin x + c$
10.	$\int \frac{1}{\sin^2} dx = -\mathrm{ctg} x + c$
11.	$\int \frac{1}{\cos^2} dx = \mathrm{tg} x + c$
12.	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + c$

13.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$
14.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + c$
15.	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x - a}{x + a}\right\| + c$
16.	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + c$
17.	$\int \frac{1}{\cos} dx = \ln\left\|tg(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right\| + c$
18.	$\int tgxdx = -\ln\|\cos x\| + c$
19.	$\int ctgxdx = \ln\|\sin x\| + c$

Приклади

Знайти невизначений інтеграл функцій:

1. $f(x) = 1$ $\quad \int 1dx = x + c$
2. $f(x) = e^x$ $\quad \int e^x dx = e^x + c$
3. $f(x) = \sin x$ $\quad \int \sin xdx = \cos x + c$
4. $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{3 \cdot 2} + c = \frac{x^3}{6} + c$
5. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}} dx$, припустивши, що $\mathbf{x \neq 0}$, підінтегральну функцію можна записати так:

$$\int (x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}})dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int 3x^{\frac{1}{2}} dx + \int 4x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + c.$$

Методи інтегрування

Усі методи інтегрування функцій зводять невизначений інтеграл до інтегралу, який знаходиться в основній таблиці інтегралів або, як кажуть, до табличного інтегралу. Одним із найбільш поширених методів є так званий **метод підстановки**. В основі цього методу лежить заміна змінної функції. Звернемо увагу читача на те, що за **t** треба вибирати таку функцію **t = w(x)**, щоб:

- під інтегралом був явний диференціал від **w(x) (w′(x)dx)** або якщо даного диференціалу й немає, то його можна легко утворити за допомогою множення або ділення на стале число, відмінне від нуля;
- інтеграл $\int g(t)dt$ був би табличним.

Якщо одночасно ці два пункти не виконуються, то інтеграл треба обчислювати іншими методами.

Приклади

Користуючись методом підстановки, обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cdot \cos xdx = \int (1-\sin^2 x)\cdot \cos xdx =$

$\int \cos xdx - \int \sin^2 x \cdot \cos xdx = \int \cos xdx - \int t^2 dx = \sin x - \dfrac{t^3}{3} + c =$

$\sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + c.$

Підстановка: t = sinx; dt = cosxdx.

2. $\int \dfrac{\ln xdx}{x} = \int tdt = \dfrac{t^2}{2} + c = \dfrac{\ln^2 x}{2} + c$

Підстановка: t = lnx; dt = $\dfrac{dx}{x}$.

3. $\int \dfrac{xdx}{1+x^4} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}arctgt + c$.

Підстановка: $t = x^2$; dt = 2xdx.

4. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \int \dfrac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{2tg\frac{x}{2}} = \int \dfrac{d(tg\frac{x}{2})}{tg\frac{x}{2}} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c.$

Підстановка: $t = tg\dfrac{x}{2}$.

Інтегрування за частинами

Розглянемо дві функції u = φ(x), v = g(x), які на деякому проміжку **(a;b)** є неперервні і мають неперервні похідні першого порядку **φ′(x)**, **g′(x)**. Тоді функції **u** та **v** мають диференціали du = φ′(x)dx, dv = g′(x)dx, причому виконується рівність d(uv) = udv+vdu. Візьмемо від обох частин цієї рівності невизначений інтеграл. Тоді внаслідок рівності диференціалів невизначені інтеграли відрізнятимуться тільки на сталу величину. Отже, маємо рівність з точністю до сталої $\int d(u\cdot v) = \int udv - \int vdu$ але $\int d(uv) = u\cdot v + c$. Тому дістаємо формулу: $\int udv = uv - \int vdu$. Зазначимо, що у формулі ми не пишемо сталої, адже стала міститься в інтегралі $\int vdu$, а сума двох сталих є сталою. Формула, що написана, називається **формулою інтегрування за частинами**.

Приклади

Знайти невизначені інтеграли, користуючись методом інтегрування за частинами:

1. $\int x\sin x dx = uv - \int vdu$.

Введемо позначення **u=x**; **dv=sinxdx**. Знаходимо $\int dv = \int \sin x dx$.v = –cosx – сталої при знаходженні **v** не пишемо. Сталу запишемо при обчисленні інтегралу $\int vdu$. Оскільки **u** є відома функція: u = x, то du = u′dx = dx. Отже, $\int x \sin x dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$. Якби ми взяли за **u=sinx**, то ми приклад не розв’язали б.

$$\int x\ln x dx = uv - \int vdu = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + c.$$

Введемо позначення: $u = \ln x$; $du = \frac{1}{x}dx$; $dv = xdx$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$.

2. $\int \ln^2 xdx = uv - \int vdu = x\ln^2 x - \int x^2 \ln x\frac{1}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx$.

Введемо позначення: $u = \ln^2x$; $du = 2\ln x\frac{1}{x}dx$; $dv = dx$; $dv = \int dx = x$.

Невизначений інтеграл $\int \ln xdx$ будемо інтегрувати за частинами.

Нехай $u = \ln x$; $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \int dx = x$.

Отже, $\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$.

Остаточно знаходимо $\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + c$.

3. $\int e^{ax}\sin bxdx = e^{ax}$

Позначимо в цьому інтегралі $u = e^{ax}$, $dv = \sin bxdx$. Звідки $du = ae^{ax}dx$,

$v = \frac{1}{b}\int \sin bxd(bx) = -\frac{\cos bx}{b}$.

Тоді $\int e^{ax}\sin bdx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx$.

Інтеграл у правій частині цієї рівності теж обчислюється за частинами. Введемо позначення: $u = e^{ax}$; $dv = \cos bxdx$, звідки $du = e^{ax}dx$ $v = \int \cos bxdx =$

$\frac{1}{b}\int \cos bxd(bx) = \frac{\sin bx}{b}$. Скориставшись формулою метода інтегрування за частинами, маємо $\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx$.

Підставивши значення цього інтегралу в рівність, дістанемо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{ae^{ax}\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

У правій частині цієї рівності маємо той самий інтеграл, що у лівій. Тому, розв'язуючи цю рівність відносно інтегралу, знаходимо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)}{b^2 + a^2} + c.$$

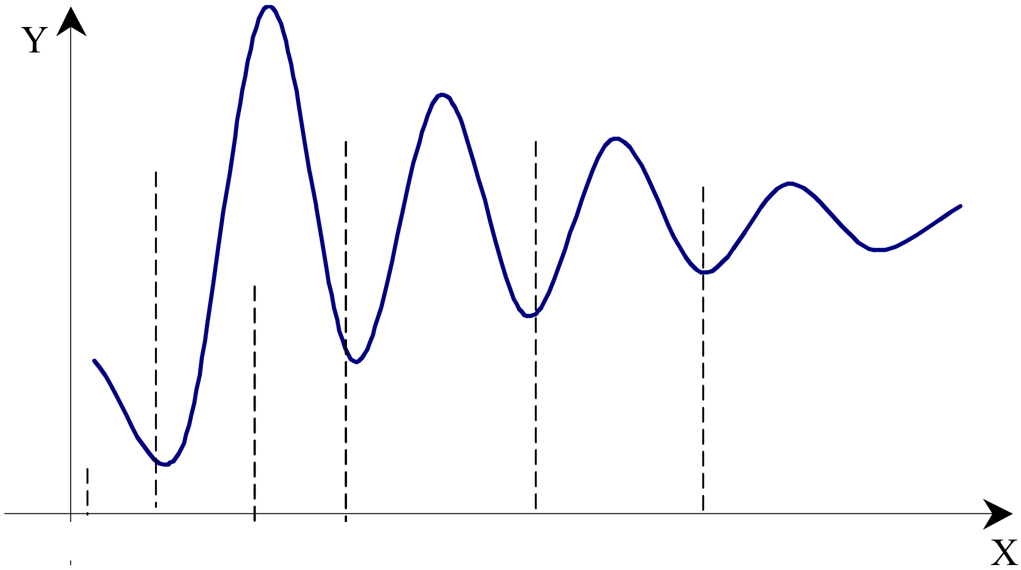
Визначений інтеграл

Для розгляду визначеного інтегралу, необхідно розглянути дві типові задачі, які приводять до цього поняття: обчислення площі криволінійної трапеції та роботи змінної сили.

У курсі математики середньої школи детально розглядається площа многокутника. Криволінійна трапеція – це фігура, яка в загальному випадку відмінна від многокутника. Тому треба дати визначення площі такої фігури, показати, що площа криволінійної трапеції за таким означенням існує, а потім розглянути спосіб обчислення цієї площі. Нехай маємо криволінійну трапецію (мал. 5), яка зверху обмежена графіком неперервної функції $\mathbf{y = f(x)}$, заданої на відрізку $\mathbf{[a; b]}$. Розіб'ємо відрізок $\mathbf{[a; b]}$ (основу трапеції на $\mathbf{n}$ довільних частин за допомогою точок $\mathbf{x_0, x_1, \ldots x_k, x_{k+1} \ldots x_n}$ так, щоб справджувалися нерівності $\mathbf{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b}$.

трапецію (мал. 5), яка зверху обмежена графіком неперервної функції

$\mathbf{y = f(x)}$, заданої на відрізку [$\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$]. Розіб'ємо відрізок $\mathbf{[a;b]}$ (основу трапеції на $\mathbf{n}$ довільних частин за допомогою точок $\mathbf{x_0, x_1, \ldots x_k, x_{k+1} \ldots x_n}$ так, щоб справджувалися нерівності $\mathbf{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b}$.



Мал. 5

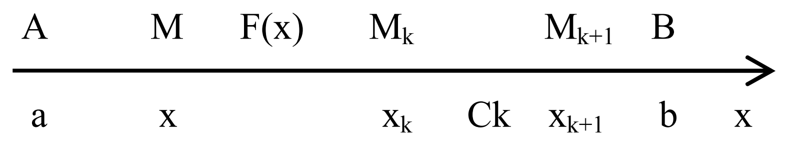
Через кожну точку поділу проведемо прямі, паралельні вісі **0у**, до перетину з графіком функції **f(x).** Тоді криволінійна трапеція розіб'ється на **n** частинних криволінійних трапецій. Розглянемо одну із таких трапецій, наприклад ту, в основі якої лежить відрізок $[-x_k, x_{k+1}]$. Оскільки функція **f(x)** є неперервною на відрізку **[a;b]**, то вона є неперервною і на кожному частинному відрізку, зокрема, на відрізку $[-x_k, x_{k+1}]$. Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку: усередині відрізка x_0, $x_1(x_1)$ – точку k_1 : x_0 k_1 x_1 усередині відрізка x_1 $x_2(x_2)$ – точку k_2 : x_1 k_2 x_2 і т.д., усередині відрізка $x_{k+1}x_k(x_k)$ – точку k_1+1:x_k $k+1$ x_k і т.д. Складемо добутки $f(k_1)$ x_1, $f(k_2)$ x_2... Кожний такий добуток рівний площі прямокутника, основою якого є відрізок Δx_1, Δx_2, а висота – значення функції f(x) в будь-якій точці відповідного відрізку. Сума таких добутків $\sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_k$ дорівнює площі всіх прямокутників, частина із них показана на малюнку. Символ $\sum_{i-1}^{n}$ означає, що проводиться додавання всіх членів $f(k_i)$ x_i, де і приймає значення 1, 2, 3, ..., n. Якщо кожний із відрізків достатньо малий, тобто $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ і т.д., то затушована область на малюнку приближається до площі криволінійної трапеції, дорівнює:

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i)\Delta x_i \ .$$

Таким чином, задача про обчислення площі криволінійної трапеції приводить до визначення границі суми.

Задача про роботу змінної сили

Якщо на точку **M**, яка рухається прямолінійна (мал.6), діє стала сила **F** і її напрям збігається з напрямом руху точки, то робота **A**, виконана цією силою, дорівнює: **A = FS**, де **S** – шлях, пройдений точкою **M**. Проте здебільше величина сили не є сталою. Вона неперервна від точки до точки, і користуватися попередньою формулою для обчислення роботи не можна.



Мал. 6

Отже, нехай величина сили **F** є функцією від **x**. F = F(x) і нехай під дією цієї сили точка **M** перемістилась з точки **A** до точки **B**, пройшовши відстань **b–a**. Розіб'ємо відрізок **[a; b]** на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Розглянемо відрізок $[x_k; x_{k+1}]$ $(k = 0,1, ... , n–1)$. Припустимо, що цей відрізок настільки малий, що **F(x)** на ньому мало змінюється. Тоді можна вважати, що величина сили дорівнює значенню **F(x)** в деякій довільно вибраній точці $\mathbf{c_k}$, а саме, $F = F(c_k)$. Отже, робота, виконана сталою силою $\mathbf{F(c_k)}$ при переміщенні точки **M** вздовж прямої з положення $\mathbf{M_k}$ в положення $\mathbf{M_{k+1}}$, наближено дорівнює:

$A\ \ F(c_k)\, x_k\ \ x_k = x_{k+1} – x_k.\ \ k = 0,1,2, ..., n–1.$

Тоді вся робота, виконана силою **F** при переміщенні точки вздовж прямої з положення **A** в положення **B**, наближено дорівнює:

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} F(C_k)\Delta x_k .$$

Зрозуміло, що чим менші будуть довжини частинних відрізків (число Δx_k), тим сума, яка стоїть у правій частині попередньої рівності, буде точніше визначати роботу, як ми її інтуїтивно уявляємо. Тому природно за роботу **A** прийняти $A = \lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n} F(c_k)\Delta x_k,\ \lambda = \max \Delta x_k,\ 0 \le k \le n-1$, якщо дана границя існує. Тим самим ми дали означення роботи змінної сили **F**, яку вона виконує при переміщенні точки **M** вздовж прямої від точки **A** до точки **B**. Обидві задачі звелись до знаходження границь сили. Суму називають **інтегральною сумою функції**.

Границю інтегральної суми називають визначеним інтегралом функції f(x) на певному відрізку **[a; b]** і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читається: **"інтеграл від a до b еф від ікс де ікс"**). Число **a** називається **нижньою межею**

інтегрування; **b** – **верхньою межею**; **f(x)** називається **підінтегральною функцією**; **f(x)dx** – **підінтегральним виразом**; відрізок [**a;b**] – **проміжком інтегрування**.

Отже, згідно з визначенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є **границя** (якщо вона існує) **інтегральної суми**.

Властивості визначеного інтегралу

Визначений інтеграл має ряд властивостей.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то при цьому знак інтегралу змінюється на протилежний.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$ – визначений інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю.

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ – сталий множник можна винести за знак визначеного інтегралу.

4. $\int_a^b [\varphi(x) \pm f(x)]dx = \int_a^b \varphi(x)dx \pm \int_a^b f(x)dx$ – визначення інтегралу від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій.

5. Якщо для функції **f(x)** існують інтеграли $\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^c f(x)dx$; $\int_c^b f(x)dx$, то має місце рівність: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Для знаходження визначеного інтегралу користуються формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a), де **F(x)** – первісна функція **f(x)**, тобто $F'(x) = f(x)$.

Таким чином, щоб знайти визначений інтеграл, необхідно відшукати первісну функцію, підставити в цю первісну – значення верхньої межі, а потім нижньої межі і одержати різницю. У загальному вигляді можна записати $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)–F(a)$

Приклади

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = 0 - (-1) = 1.$

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_{0}^{1} = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

3. $\int\limits_{1}^{2} x \ln x dx = \Big| \ u = \ln x, du = \ dx.\ dv = xdx, v = \frac{x^2}{2} \Big| \ =$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} \ x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} = (\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2)\Big|_{1}^{2} =$

$= \frac{1}{2}2^2 \ln 2 - \frac{1}{4}2^2 - \frac{1}{2}1^2 \ln 1 + \frac{1}{4}1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$

У заданому інтегралі застосуємо підстановку t = cos x, де $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Тоді на цьому відрізку **cosx** змінюється монотонно (спадає), а отже, ми можемо визначити межі по **t**. Для цього в попередній рівності покладемо x = 0. Матимемо нижню межу t = 1. Якщо x = $\frac{\pi}{2}$, то маємо верхню межу t = 0.

Складемо таку таблицю:

x	π / 2	0
t	0	1

Знаходимо dt = – sin xdx. Тоді $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx = -\int\limits_{1}^{0} t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{0} = \frac{1}{3}.$

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

Застосуємо підстановку t = e^x, або x = lnt. Тоді межі по **t**:

x	0	1
t	1	e

Знаходимо: $dx = \frac{dt}{t}$. Отже,

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_1^e \frac{dt}{t(t+\frac{1}{t})} = \int_1^e \frac{dt}{t^2+1} = \text{arctgt}\Big|_1^e = \text{arctge} - \text{arctg1} = \text{arctge} - \frac{\pi}{4}.$$

6. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Застосовуємо підстановку $t = x^2 + 9$. Знаходимо межі інтегрування по **t**:

x	0	4
t	3	5

Знаходимо $dt = 2\,xdx$.

Отже, $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_3^5 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_3^5 = \frac{1}{3}\sqrt{5^3} - \frac{1}{3}\sqrt{3^3} = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$.

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння першого порядку

Математичні методи дослідження явищ та процесів, що відбуваються в природі, у живих організмах не можливо без диференційних рівнянь. Використання їх дає можливість одержать функціональну залежність між величинами, які нас цікавлять, але і вивчити їх вплив на дані процеси (явища), що дуже важливо для медико-біологічних процесів.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що має незалежну змінну **x**, функцію **y = f(x)** і похідні **y′(x), y″(x)...** і т.д. **F(x, y, y′, y″ ... y^{μ}) = 0**.

Порядок диференційного рівняння визначається по порядку найбільшої похідної, що входить у рівняння. ***Приклад:*** F(x, y, y′) = 0 – **диференційне рівняння першого порядку**. F(x, y, y′, y″) = 0 – **диференційне рівняння другого порядку** і т. д.

Загальним рішенням диференційного рівняння називається функція, яка будучи підставлена в рівняння, обертає його в тотожність. ***Приклад:*** функція $y = e^{\sqrt{1-x^2}} + c$ є загальним розв’язком диференційного рівняння:

$$xydx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$$

Якщо, припустити y = $e^{\sqrt{1-x^2}}$ +c, знайдемо y = $\dfrac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ і, підставивши значення **y** і **dy** в дане рівняння, одержемо тотожність:

$$xe^{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,\frac{(-xe^{\sqrt{1-x^2}})}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають інтегруванням. Щоб не плутати операцію інтегрування диференціального рівняння з операцією знаходження невизначеного інтегралу, останню називають квадратурою.

Якщо при інтегруванні диференціального рівняння приходять до квадратури, то кажуть, що диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах. Це означає, що розв'язок диференціального рівняння виражено через квадратуру (невизначений інтеграл).

Зауважимо, що до розв'язків диференціального рівняння $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x,y)}$, яке називається оберненим диференціальним рівнянням. Диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ можна записати ще так: dy – f(x,y)dx = 0. Помноживши обидві частини цього рівняння на деяку функцію N(x, y) $\neq 0$ дістаємо таке диференціальне рівняння M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. Функції M(x, y), N(x, y) називають **коефіцієнтами диференціального рівняння**.

Дане диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Розглянемо окремі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах. Нехай маємо диференціальне рівняння виду $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, яке явно не містить шуканої функції **y**. Як вже зазначалося, таке диференціальне рівняння має загальний розв'язок y = $\int f(x)dx + c$.

Задамо початкову умову $y(x_0) = y_0$, де x_0 – будь-яка точка відрізка [**a, b**], то для диференціального рівняння виконуються умови $a \le x \le b;\ -\infty < y < +\infty$, диференціальне рівняння має єдиний розв'язок. Цей розв'язок можна записати так: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx$.

Приклади

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^2 x$.

Тут права частина є функція, неперервна в усіх точках інтервалу $|-\infty, +\infty|$. Тому диференціальне рівняння з початковою умовою має єдиний розв’язок:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \sin^2 x dx = y_0 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(1-\cos 2x)dx = y_0 + \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}(x_0 - \frac{1}{2}\sin 2x_0).$$

Зокрема, якщо $\mathbf{x_0=0}$, то $y = y_0 + \frac{1}{2}(x - \sin 2x)$.

2. $\dfrac{dy}{dx} = x(y-1)$, при $\mathbf{y \neq 1}$.

Дане рівняння допускає відокремлювання змінних $\dfrac{dy}{y-1} = xdx$. Звідси $\int \dfrac{dy}{y-1} = \int xdx + c$. Знайшовши інтервали, маємо $\ln|y-1| = \dfrac{x^2}{2} + \ln c$. Після потенціювання $\ln|y-1| = \dfrac{x^2}{2} + \ln c$, маємо $y = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$. Дістали загальний розв’язок диференціального рівняння.

3. $x(y-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$.

Помножимо обидві частини цього рівняння на функцію $\dfrac{1}{(x^2-1)(y^2-1)}$. Дістанемо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{x}{x^2-1}dx + \dfrac{y}{y^2-1}dy = 0$.

Загальний інтеграл, згідно з формулою має $\int \dfrac{x}{x^2-1}dx + \int \dfrac{y}{y^2-1}dy = c$.

Знайшовши інтеграли, дістанемо $\ln|x^2-1| + \ln|e^2-1| = \ln|c|$. Після потенціювання остаточно маємо такий загальний інтеграл $(x^2-1)(y^2-1) = c$. Знайдемо корні рівнянь:

$$x^2-1 = 0,\ y^2-1 = 0.$$

Маємо $\mathbf{x=\pm 1}$; $\mathbf{y=\pm 1}$. Отже, прямі $\mathbf{x=\pm 1}$ і $\mathbf{y=\pm 1}$ є інтегральними кривими диференціального рівняння. Проте ці розв’язки знаходяться із загального інтеграла при **c=0**. Тому вписувати їх не слід. Вони є окремими розв’язками заданого диференціального рівняння.

Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx}$=f(x, y) називають **однорідним**, якщо функція **f(x, y)** задовольняє умову f(x, y) = f(tx, ty), де **t** – будь-яке число, відмінне від нуля. Функція **f(x, y)**, що задовольняє умову, називається однорідною функцією нульового виміру. Тому диференційне рівняння називають однорідним, якщо права частина його є однорідна функція нульового виміру.

Розглядають також функції виміру **n**, це функції, для яких справджується умова $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. При **n=0** маємо функцію нульового виміру. Однорідні диференціальні рівняння зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою y = u(x), де **u** – невідома функція **x**, u = u(x). Припустимо, що функція u = u(x) є розв'язком диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}$ = f(x, y). Тоді тотожно виконується рівність $x\frac{du}{dx}+u=f(x, ux)$. Проте за умовою, функцію f(x, ux) можна записати так: f(x, ux) = f(tx, tux). Нехай $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Маємо f(x, ux) = f(1, u), тобто f(1, u) є функція від однієї змінної u $f(1,u)=\varphi(u)$. Диференціальне рівняння набирає вигляду: $x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$, або в диференціальній формі:

$$xdu = [\varphi(u) - u]dx.$$

Диференціальне рівняння допускає відокремлювання змінних.

Справді, якщо $\varphi(u) - u \neq 0$, то рівняння можна записати так: $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$, звідси $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + c$. Підставивши сюди значення

$u=\frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння. Загальний інтеграл ми знайшли при виконанні умови $\varphi(u) - u \neq 0$. Нехай дана умова не виконується. Тоді матимемо два такі випадки:

1. $\varphi(u) - u = 0$, або $\varphi(u) = u = \frac{y}{x}$. У даному випадку диференціальне рівняння набирає вигляду $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я півпрямих y=Cx $(x \neq 0)$, до яких треба приєднати півпрямі x =0 $(y \neq 0)$.
2. Умова $\varphi(u) - u \neq 0$ порушується при окремих значеннях **x**, наприклад, при $u = u_0$. Тоді, крім загального інтеграла, диференціальне рівняння має ще розв'язок $u = u_0$ або $y = u_0x$, тобто інтегральною кривою є пряма, що проходить через початок координат.

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння:

1. $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$. Це однорідне диференціальне рівняння. Зробивши підстановку y=ux, маємо $x\dfrac{du}{dx}+u=u\ln u$ або $\dfrac{xdu}{dx}=u(\ln u-1)$. Відокремлюючи змінні, дістаємо $\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$.

Після інтегрування $\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|c|$. Звідси знаходимо загальний розв'язок: $y = xe^{ex+1}$. Відокремлюючи змінні, ми припустили, що $u(\ln u-1)\neq 0$. Нехай u(lnu-1) = 0, тоді u = 0, u = e. Кореню u = 0 відповідає значення y = 0. Це значення, як видно з рівняння, не належить області визначення заданого рівняння. Кореню u = e, відповідає розв'язок y=ex. Проте цей розв'язок міститься у загальному розв'язку $y = xe^{ex+1}$. Його можна дістати із загального розв'язку при c=0. Отже, всі розв'язки диференціального рівняння виражаються формулою $y = xe^{ex+1}$.

Неоднорідне диференціальне рівняння

Якщо в диференціальному рівнянні:

$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x),$ функція $Q(x)\neq 0$ в розглянутому проміжку [a; b],

то таке диференціальне рівняння називається **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням**.

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння знаходять методом варіації довільної сталої. Розглянемо суть цього методу на прикладі.

Приклад*:* $\dfrac{dy}{dx}-y=2x-x^2$.

Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

Відокремимо змінні $\dfrac{dy}{dy}=dx$. Звідси $\int\dfrac{dy}{y}=\int dx+\ln|c|$ або $\ln|y|=x+\ln|c|$.

Пропотенціювавши, маємо такий загальний розв'язок диференціального рівняння $y=ce^x$. Для знаходження розв'язку неоднорідного рівняння застосуємо метод варіації довільної сталої. Припустимо, що у формулі $y=ce^x$, $c=c(x)$. Підставимо функцію у диференціальне рівняння. Тоді $\frac{dc}{dx}e^x + ce^x \cdot x^2 - ce^x = 2x - x^2$. Звідси дістаємо таке диференціальне рівняння: $\frac{dc}{dx} = (2x - x^2)e^{-x}$. Отже, c= $\int (2x - x^2)e^{-x}dx + c$. Інтеграл знаходимо частинами. Для цього покладемо $u = 2x - x^2$, $dv = e^{-x}$, користуючись формулою $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int (2x - x^2)e^{-x}dx = -(2x - x^2)e^{-x} + 2\int (1-x)e^{-x}dx =$$

$$-(2x - x^2)e^{-x} - 2(1-x)e^{-x} - 2\int e^{-x}dx = 2e^{-x}[1-(2x - x^2)].$$

Отже, $c = 2e^{-x}[1-(2x-x^2)-2(1-x)] + c$. Підставивши знайдено значення **c** у формулу, знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = ce^x + 2[1-(2x-x^2) - 2(1-x)].$$

Розв'язок деяких медичних задач грунтується на розв'язку диференціальних рівнянь.

Приклад*:* Швидкість охолодження тіла прямопропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. До якої температури охолоджується тіло за 30 хвилин, якщо за 10 хвилин воно охолола від 100^0 до 60^0C? Температура навколишнього середовища 20^0C.

Розв'язок

Складаємо основне рівняння $-\frac{dt}{d\tau} = k(t - t_\gamma)$.

$$\frac{dt}{t - t_\gamma} = kd\tau,\ \int \frac{dt}{t - t_\gamma} = -\int kd\tau,\ \ \ln|t - t_\lambda| = -k\tau + \ln c,\ \ t - t_\lambda = ce^{-k\tau},$$

якщо $\tau = 0$, $t = 100^0$C, $100 - 20 = c$, $c = 80^0$;

якщо $\tau = 10$, $t = 60^0$C, $60 - 20 = 80\ e^{-10k}$ $k = \frac{\ln 2}{10}$;

якщо $\tau = 30$, $t = 80^0$C, $e^{-30}\ \frac{\ln 2}{10} + tg = 80 \cdot e^{-3\ln 2} + 20 = 30^0\,C$.

Задача: Закон радіоактивного розпаду радію полягає в тому, що швидкість розпаду радію в кожний момент часу пропорційна наявній кількості радію. Знайти закон розпаду радію в залежності від часу, якщо при $t = 0$, було R_0 г радію. Нехай при t і $t+\Delta t$ була кількість радію R і $R+\Delta R$. Величина $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ – характеризує середню швидкість розпаду радію за проміжок часу Δt.

$\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{dR}{dt}$ – швидкість розпаду радію в момент часу t.

Диференціальний закон розпаду радію $\frac{\Delta R}{\Delta t} = -\lambda R$, де $\lambda -$ коефіцієнт пропорційності, знак "–" – згідно умови при збільшенні t **R** – зменшується. Проінтегруємо рівняння $\frac{dR}{dt} = -\lambda dt$, $\ln R = -\lambda t + \ln c$, $R = ce^{-\lambda t}$. Визначаємо **C** при начальних значеннях t = 0, R = R_0. $R_0 = ce^{-x0}$; c = R_0. Підставляємо значення **c** в рівняння, одержимо закон розпаду радію $R = R_0e^{-\lambda t}$. Коефіцієнт λ знаходиться дослідним шляхом. За $\mathbf{t_0}$ років розпадеться **P%** від $\mathbf{R_0}$, тому через $\mathbf{t_0}$ років стане $R_0 - \frac{P}{100} \cdot R_0 = R_0 (1 - \frac{P}{100})$. Згідно закону розпаду буде $R_0e^{-\lambda t0}$. Маємо рівність $R_0(1 - \frac{P}{100}) = R_0e^{-\lambda t_0}$.

Знаходимо λ: $e^{-\lambda t_0} = 1 - \frac{P}{100}$; $-\lambda t_0 = \ln(1 - \frac{P}{100})$; $\lambda = -\frac{1}{t_0}\ln(1 - \frac{P}{100})$.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні означення і поняття

Розглянемо тепер диференціальні рівняння вищих порядків – рівняння, що містять похідні вищих порядків. При цьому **порядок найвищої похідної** називають порядком диференціального рівняння. Зокрема, **диференціальним рівнянням n-порядку** називають співвідношення виду $\mathbf{F(x, y, y^I, ...\ y^{(n)}) = 0}$, де **x** – незалежна змінна, **y = y(x)** – шукана функція, а $\mathbf{y', ...\ y^{(n)}}$ – відповідні похідні від функції **y**.

У рівнянні величини $\mathbf{x, y, y', ...\ y^{(n-1)}}$ можуть і не входити, але обов'язково повинна входити похідна порядку **n**. Припустимо, що рівняння може бути розв'язане відносно старшої похідної $\mathbf{y^{(n)}}$, $\mathbf{y^{(n)} = f(x, y, y^I, ...\ y^{(n-1)})}$. Дане рівняння називають диференціальним рівнянням порядку n, розв'язаним відносно похідної n-порядку. Надалі вивчатимемо диференціальні рівняння виду $\mathbf{y^{(n)} = f(x, y, y', ...\ y^{(n-1)})}$. Загальний розв'язок диференціального рівняння є сім'я кривих, залежних від **n-параметрів** $\mathbf{C_1, C_2, ...\ C_n}$, а окремий розв'язок – окремою кривою з цієї сім'ї. Ці криві називають ще **інтегральними кривими диференціального рівняння**. Для диференціального рівняння порядку **n** розв'язується задача з початковими умовами, яка ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння треба знайти той розв'язок **y = y(x)**, який при $\mathbf{x = x_0}$ ($\mathbf{x_0}$ – довільна точка проміжку, на якому задана функція, задовольняє умови: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0^1$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, де $\mathbf{y_0}$, y_0^1, ..., $y_0^{(n-1)}$ – довільні наперед задані дійсні числа.

Числа $\mathbf{y_0}$, y_0^1, ..., $y_0^{(n-1)}$ називають початковими даними розв'язку **y = y(x)**, а число $\mathbf{x_0}$ – початковим значенням незалежної змінної **x**. Взяті разом числа $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{y_0}$, $\mathbf{y_0^I}$, ..., $\mathbf{y0^{(n-1)}}$ називають початковими даними рівняння, а **умови** $\mathbf{y(x_0) = y_0}$ **...** і т.д. початковими умовами диференціального рівняння. Так, для диференціального рівняння другого порядку $\mathbf{y'' = f(x, y, y')}$ задача полягає у знаходженні розв'язку $\mathbf{y = y(x)}$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови: $\mathbf{y(x_0) = y_0, y'(x_0)} = y_0^1$.

Приклади

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y''^3 - 2y'' - x = 0$.

Розв'язок: це рівняння допускає розв'язання відносно **x**: $x = y''^3 - 2y''$. Введемо підстановку $y'' = t$. Тоді $x = t^3 - 2t$. Скористаємося співвідношенням:

$$y' = \int t(3t^2 - 2)dt + C_1 = \int (3t^2 - 2t)dt = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

Дістаємо $y = \int (\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1)dt + C_2 = \frac{3}{20}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C_1 t + C_2$. Отже, загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд:

$x = t^3 - 2t$.

$y = \frac{3}{20}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C_1 t + C_2$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2xy'' = y'$.

Розв'язок: застосовуємо підстановку $Z = y'$. Тоді рівняння набирає вигляду: $2xZ' = Z$. Дістали рівняння першого порядку, яке допускає відокремлювання змінних $\frac{dZ}{Z} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$. Звідси знаходимо $\ln|Z| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|C_1|$, або $Z = C_1\sqrt{x}$, де $\mathbf{C_1}$ – стала інтегрування. Підставимо у рівність значення $Z = y'$. Матимемо диференціальне рівняння першого порядку $y' = C_1\sqrt{x}$. Загальний розв'язок цього рівняння є:

$$y = \int C_1\sqrt{x}\,dx + C_2 = \frac{2}{3}C_1 x^{\frac{3}{2}} = C_2.$$

Дана функція і є зальним розв'язком диференціального рівняння.

3. Знайти рівняння кривої $y = \varphi(x)$, яка проходить через точку (1; 2), якщо $\frac{dy^2}{dx^2} = 6x^2$.

Розв'язок: інтегруємо диференціальне рівняння $\frac{dy^2}{dx^2} = 6x^2$. Якщо $\frac{dy}{dx} = z$, маємо:

$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dx} = 6x^2$. $dz = 6x^2dx$; $\int dz = 6\int x^2dx + C_1$, $z = 2x^3 + C_1$, або $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + C_1$. Інтегруємо це рівняння, знаходимо, що $y = \frac{1}{2}x^4 + C_1x + C_2$. Підставимо: $x = 1$, $y = 2$, одержимо: $3 = 2 + C_I$, $C_I = 1$.

$2 = \frac{1}{2} + C_1 + C_2$. $C_I + C_2 = 1\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Рівняння кривої: $y = \frac{1}{2}x^4 + x + \frac{1}{2}$.

5. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК

Точне вимірювання величин, освоєння методів вимірювання дало можливість розвитку точних наук і медицини в тому числі. Установлення точних кількісних величин, відношення між ними сприяло відкриттю об’єктивних законів і дало можливість пояснити функціональні залежності, що протікають в живому організмі.

При обстеженні хворого лікар повинен проаналізувати велику кількість показників, виявити закономірність і лише потім визначитись у діагнозі захворювання. Без вимірювання фізіологічних показників зробити це не можливо.

Вимірюванням називається знаходження значення фізичної величини дослідження за допомогою технічних засобів.

Виміряти яку-небудь величину – це порівняти її з уже відомою, що береться за основну, тобто необхідно знайти їх числове відношення.

Всяке вимірювання є порівнянням даної величини з іншою, однорідною величиною прийнятою за одиницю. Але не завжди це можна зробити. Якщо лінійні розміри тіла можна вимірювати масштабною лінійкою, штангельциркулем, мікрометром, то щоб визначити густину тіла, необхідно визначити об’єм та масу тіла, для визначення швидкості руху тіла необхідно знати пройдений шлях та час.

Всі виміри поділяються на прямі і посередні (непрямі). До прямих вимірів відносяться ті, що можна виміряти за допомогою приладів, числова величина визначається одним виміром або спостереженням. Прикладом може бути вимірювання ваги людини, температури тіла, артеріального тиску і т.п. Посередні виміри одержують при проведенні досліджень, коли фізична величина являється функцією однієї або декількох змінних одночасно. Визначення коефіцієнту поверхневого потягу рідини $[\sigma = f(l)]$, в’язкості рідини віскометром $[\eta = f(h, \rho)]$, концентрації розчину цукру поляриметром $[c = f(\varphi kl)]$ і можна назвати ще багато прикладів посередніх вимірів. Точність вимірювання біофізичних величин буде залежати від одиниць вимірювання.

Історично склалось так, що практика відібрала найбільш зручні одиниці для вимірювання. Всі одиниці вимірювання об’єднуються в **систему одиниць**. Згідно ГОСТ 9867–61. в усіх галузях наук використовується **міжнародна система одиниць СІ**.

Система СІ базується на шести основних одиницях (еталонних

одиницях):

- **одиниця довжини – метр;**
- **одиниця маси – кілограм;**
- **одиниця часу – секунда;**
- **одиниця температури – градус Кельвіна;**
- **одиниця сили струму – ампер;**
- **одиниця сили світла – кандела.**

Згідно системи СІ, визначенням основних одиниць, на яких базуються всі прямі виміри фізичних величин є:

Метр – *довжина*, що дорівнює 1650763,73 довжини хвилі у вакуумі випромінювання переходу між двома енергетичними рівнями $2P+2d_5$ атома Криптона 86.

Кілограм – *одиниця маси* – представлена масою міжнародного прототипу кілограма. Прототип представляє собою циліндр, висота якого дорівнює діаметру, виготовленого із сплаву платини (90%) і іридію (10%).

Секунда – 9192631770 періодів випромінювання відповідного переходу між рівнями $F = 4$, $m_F = 0$ та $F = 3$, $m_F = 0$ основного стану атому цезію –133 відсутністю зовнішнього поля.

Ампер – *сила незмінного струму*, який проходить по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і мізерного колового перерізу, розміщеного на віддалі 1м один від одного у вакуумі, створює між ними силу взаємодії рівну $2\cdot10^{-7}$ Н на кожний метр довжини.

Кельвін – 1/273,16 *частина термодинамічної температури* потрійної точки води.

Кандела – визначається на основі того, що яскравість чорного випромінювача при температурі затвердіння платини (близько 2042°К) дорівнює 0,6 кд.мм^2.

Для вимірювання більшості фізичних величин використовуються **похідні одиниці,** що мають зв'язок між основними одиницями, або одна з одною з'єднані за допомогою математичних виразів, що виражають фізичні залежності.

Приклад: $I = \dfrac{U}{R + r}$; $F = ma$; $hv = A + \dfrac{mv^2}{2}$.

$$IA = \frac{В}{ом};\ 1н = \frac{кг \cdot м}{см^2};\ Дж = н \cdot м^2 .$$

У системі СІ використовують **додаткові одиниці** – **радіан і стерадіан**.

Радіан – одиниця вимірювання плоского кута.

Стерадіан – одиниця вимірювання тілесного кута.

В медичній практиці результати вимірювання повинні бути точні і однакові, якщо вимірюються ідентичні величини. Але при вимірах біофізичних величин під дією різних факторів виникають похибки, що не приводять до точності результату і істинне значення фізичної величини абсолютно точно визначити неможливо. Всі похибки поділяються на систематичні, випадкові і промахи.

Систематичною називають таку похибку, яка залишається постійною або закономірно зменшується при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Такі похибки виникають внаслідок несправності приладу, неправильно вибраної методики, вибраної неточної формули для обчислення, використаної константи та ін.

Випадковою похибкою називається похибка, яка виникає під дією непередбачених факторів, що не піддаються контролю. Якщо при вимірах буде врахована систематична похибка, але повторні виміри дають велику розбіжність, то це можна пояснити тим, що не враховані різні фактори – фізіологічні зміни органів відчуття експериментатора, зміни навколишнього середовища (температура, тиск, вологість, оптичні, магнітні, електричні властивості).

Промахом називають таку похибку при вимірюванні, коли виміряна величина буде значно більшою за передбачену при даних умовах вимірювання.

Промахи виникають з вини експериментатора: неправильно записаний результат, зроблено обчислення, вибраний прилад для вимірювання та т.п.

Похибки обов’язково повинні бути враховані і усунені при вимірюванні; систематичні – вдосконаленням приладів, підвищення класу точності їх, вдосконаленням методик, математичних обчислень; випадкові – повинні враховуватись умови вимірювання, проводитись повторні виміри, використовуватись спеціальні математичні обчислення. Промахи – відкидаються і далі вони не беруть участь в дослідженнях.

1. Лабораторний метод обчислення похибок. При прямих вимірах обчислюється абсолютна і відносна похибка. Дійсним значенням вимірюваної величини називають значення, одержане за допомогою точного приладу **(x)**.

Різниця модуля дійсного значення **(x)** вимірюваної величини і показом даного приладу **(x_1)** називають абсолютною похибкою (Δx) приладу. $|\Delta x| = |x_1 - x|$. Точність вимірювання характеризується відношенням абсолютної похибки Δx до дійсного значення вимірюваної величини: $E_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$, вимірюється у процентах. При вимірах у дослідах за дійсне значення приймають середнє арифметичне значення:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n. \quad x_{ср} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots x_n}{n}.$$

x_1...x_n – фізичні величини;
n – кількість вимірів.

Середню абсолютну похибку ($\overline{\Delta x}$) підраховують наступним способом:

$$\overline{\Delta x} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \ldots + |\Delta x_n|}{n}$$

$$\Delta x = x_1 - x_{ср.}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_{ср.}$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{ср.}$$

Відносна похибка може бути записана $E_x = \left|\frac{\Delta x}{x_{ср.}}\right| \cdot 100\%$.

Результати вимірювання записують, враховуючи правила округлення:

$$x = x_{ср.} \pm \Delta x,\ x = \overline{x}_{ср.} \pm E_x.$$

2. Технічний метод обчислення похибок. При обчисленні похибок технічним методом враховується чутливість приладу, клас точності, ціна поділки.

Слід пам'ятати:

■ якщо відома чутливість приладу, то абсолютна похибка дорівнює $\frac{1}{2}$ чутливості приладу;

■ якщо відома ціна поділки приладу, то абсолютна похибка дорівнює $\frac{1}{2}$ ціни поділки, за винятком приладів, що мають ноніус;

■ якщо прилади мають ноніус, то абсолютна похибка дорівнює ціні поділки ноніуса;

■ якщо відомий клас точності приладу, то абсолютна похибка вираховується за формулою:

(ΔX)= КЛАС ТОЧНОСТІ ПРИЛАДУ Х NMAX

100%

так як клас точності приладу = $\frac{\Delta N}{N_{max}} \cdot 100\%$.

При дослідженнях користуються обома методами обчислення похибок у кінцевому результаті записують більшу абсолютну похибку. Якщо в обчисленнях є табличні дані, то інколи використовують допоміжні числа.

Приклад:

1) ρ = 1,00013 г/см^3, цей результат можна записати: $\rho = (1 \pm 1{,}00013)$ г/см^3.

2) ρ = 0,99973 г/см^3, можна записати $\rho = (0{,}99973 \pm 0{,}00027)$ г/см^3.

Коли не можна відкидати або додавати числа, а це відноситься до констант табличних даних, тоді Δx записують як половина числа відомого розряду після коми:

$$\rho_{Fe} = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}.\ \rho_{Fe} = (8{,}9 \pm 0{,}05) \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}\ .$$

3. Обчислення похибок при посередніх вимірах. У більшості випадків фізичні величини залежать функціонально одна від одної, а деколи від декількох величин. При цьому користуються формулами диференціювання, так як формули похибок одержують в тому приближенні, що і формули для диференціалу функції. Для находження абсолютної похибки користуються готовими формулами, які представлені в таблиці.

ТАБЛИЦЯ

Математична операція a	**Абсолютна похибка** Δa	**Відносна похибка** E_a
$x + y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$x–y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
xy	$x \cdot \Delta y + y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
xyz	$yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$
$\frac{y}{x}$	$\frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
x^n	$nx^{n-1}\Delta x$	$n\frac{\Delta x}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x$	$\frac{1}{n}\frac{\Delta x}{x}$
$\frac{x}{1 \pm x}$	$\frac{\Delta x}{(1 \pm x)^2}$	$\frac{\Delta x}{x(1 \pm x)}$
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$
$\sin x$	$\cos x\,\Delta x$	$\mathrm{ctg}\,x\,\Delta x$
$\cos x$	$\sin x\,\Delta x$	$\mathrm{tg}\,x\,\Delta x$
$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$\mathrm{ctg}\,x$	$\frac{\Delta x}{\sin^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$

Якщо математична формула складна тоді необхідно:

* прологарифмувати новий диференціал функції;

* знайти новий диференціал функції;

*обчислити абсолютну похибку, замінив знак диференціалу **d** на знак абсолютної похибки Δ;

* обчислити відносну похибку $\mathbf{E_x}$;

* записати результати обчислень.

Приклад:

Модуль Юнга кістки обчислюється за формулою: $E = \dfrac{Fl^3}{3{,}2fbh^3}$,

де:

F – сила навантаження;

f – стріла прогину;

l, b, h – лінійні розміри кістки.

Для обчислення абсолютної похибки використовуємо формули диференціювання:

1) lnE = lnF + 3lnl – ln3,2 – lnf – lnb – 3lnh.

2) $\dfrac{dE}{E} = \dfrac{dF}{F} + \dfrac{3dl}{l} - \dfrac{df}{f} - \dfrac{db}{b} - \dfrac{3dh}{h}$.

3) $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{\Delta F}{F} + \dfrac{3\Delta l}{l} - \dfrac{\Delta f}{f} - \dfrac{\Delta b}{b} - \dfrac{3\Delta h}{h}$.

4) $\Delta E = (\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{\Delta F}{F} + \dfrac{3\Delta l}{l} - \dfrac{\Delta f}{f} - \dfrac{\Delta b}{b} - \dfrac{3\Delta h}{h})E$.

5) $E_x = \dfrac{\Delta E}{E} \cdot 100\%$.

Величини: ΔF, Δl, Δf, Δb, Δh – обчислюємо, використовуючи лабораторний або технічний метод обчислення абсолютних похибок.

6.Основи теорії ймовірності

На практиці ми маємо справу з великою кількістю подій, які не можливо передбачити з великою впевненістю. Прикладом може бути: як проходить захворювання у людини, які будуть наслідки від лікування.

Ми повинні враховувати, що все буде залежить від випадків впливу на людину різних факторів: Яке захворювання? Які ліки використовували? Які дози? Який загальний стан людини був до захворювання? Вчасно звернулась людина до лікаря? Який вік? Та інше. Тому всі події носять випадковий характер – вилікується хворий, чи ні?

Подія називається випадковою по відношенню до хворого.

Подія називається випадковою, якщо вона може наступити, а може і не відбутися за деяких умов.

Виграти в лотерейний білет – може бути, а може і не бути.

Випадкові події позначимо **A, B, C ...** або $\mathbf{A_1, A_2, A_3, ... A_n}$.

Якщо **подія** обов'язково наступить, то вона **називається вірогідною.** ***Наприклад:*** зміна дня і ночі в добі, ми завжди знаємо, що після дня наступить ніч, після ночі – день.

Події неможливі – ті, що ніколи не можуть відбутись або наступити**.** ***Приклад:*** зміна пори року – ніколи після літа не буде зима і т.п. Не можливо виграти 2 рази на один і той же лотерейний білет.

Комплекс умов, які необхідні для того, щоб подія могла відбутися (або не відбутися), називається **випробуванням.** Наслідком випробування є поява випадкової події. Якщо внаслідок випробування відбувається подія, яка нас цікавить, то кажуть про сприятливий вихід випробування. Якщо ця подія не відбувається, вихід називають несприятливим.

Будь-яка випадкова подія, що повторюється декілька разів у випробуванні називається **масовою або статистичною.** ***Приклад:*** обстеження хворого: температура, тиск, аналізи крові, сечі та ін. в інтервалі з часом. Величини цих параметрів вгадати ми не можемо, вони носять випадковий характер, повторюються т.б. будуть масовими.

Щоб виявити, яке явище буде більше ймовірним (тобто має шансів наступити більше раз, чим друге) вводять поняття частота події. Нехай зроблено **n** випробувань і число сприятливих виходів – **m**, події **A**.

$$\mathbf{\underline{A}, B, C, \underline{A}, D, E, \underline{A}, \underline{A}, D, K}$$

$$\mathbf{n = 10; m = 4.}$$

Відносна частина події A – (A) це відношення числа сприятливих виходів до числа випробувань: $P(A) = \frac{m}{n}$ **(1)**; $P(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Оскільки: $0 \le m \le n$, то $0 \le P(A) \le 1$.

Із збільшенням кількості випробувань відносна частина події прямує до евної границі, яка називається **ймовірністю випадкової події** $P(A)$**,** тобто

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A) \quad \mathbf{(2)}.$$

Імовірність випадкової величини (події) – найважливіша її характеристика. Формула **(2)** являє собою статистичне визначення ймовірності. Практичне застосування цієї формули полягає в тому, яке значення відносної частини випадкової події необхідно взяти за значення ймовірності, щоб була забезпечена необхідна точність визначення $P(A)$.

Із визначення ймовірності випадкової події ясно, що $P(A)$ – це величина, яка менша або дорівнює одиниці $0 \le P(A) \le 1$, якщо P(B)=1, то подію визначають вірогідною; якщо P(C)=0, то подію **C** називають неможливою.

Введемо ще деякі поняття. Події **A і B** називаються **несумісними,** якщо поява події **A** виключає можливість появи події **B**. ***Наприклад:*** одночасно при киданні грального кубика неможливо одночасно випадання двох і трьох точок на грані кубика. Якщо несумісні події $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots A_n}$ утворюють таку групу подій, що внаслідок випробування обов'язково відбувається одна із цих подій і не може відбутися ніяка інша подія, яка не входить в цю групу, то кажуть, що події $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots A_n}$ утворюють **повну групу подій**.

Події **A і B** є **протилежними**, якщо при випробуванні не відбувається одна із них (перша), але відбувається обов'язково друга. ***Приклад:*** при підкиданні копійки, події випадання герба або цифри є протилежними.

Події називаються **незалежними**, якщо ймовірність однієї із них не залежить від того, відбувається чи не відбувається друга. ***Наприклад:*** при дворазовому киданні копійки подія **A**, яка полягає у випаданні "герба" при першому киданні, і подія **B**, яка полягає у випаданні "герба" при другому киданні є незалежними.

Події **A і B** називаються **залежними**, якщо ймовірність однієї з них залежить від того, чи відбулася, чи не відбулася інша. В останньому випадку вводиться **поняття умовної ймовірності**. Так, імовірність події **B** при умові, що вже настала подія **A**, позначається **P(B/A)**.

Складні події

A	**B**	**A+B**
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	–
A	**B**	**A·B**
+	+	+
+	–	–
–	+	–

–	–	–

А і **В –** випадкові події. Сума випадкових подій наступить лише тоді, коли наступить хоч одна із подій.

Добуток випадкових подій наступить лише тоді і тільки тоді, коли будуть мати місце обидві події.

Теорема суми ймовірностей

Імовірність складної події, яка полягає в тому, що відбулася з двох несумісних подій (подія **А** або подія **В**), дорівнює сумі ймовірностей подій **А і В**, тобто **Р**(**А** або **В) = Р**(**А**) + **Р**(**В**).

З теореми випливають деякі наслідки:

1. Якщо несумісні події $\mathbf{A_1, A_2, A_3, ... A_n}$ утворюють повну групу, то
$$P(A_1)+ P(A_2)+ P(A_3)+ ...+ P(A_n) = 1.$$
2. Якщо події **А і В** є протилежними, то **Р**(**А**) = 1 – **Р**(**В**).

Теорема множення ймовірностей

Для незалежних подій. Якщо події **А** і **В** незалежні, то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбулися обидві ці події (подія **А** і **В**), дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто Р(А і В) = Р(А)·Р(В).

Для залежних подій. Якщо події **А** і **В** незалежні, то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбулися обидві ці події (подія **А** і **В**), дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої, тобто Р(А і В) = Р(А)·Р(В/А) = Р(В)·Р(А/В).

З теорем додавання і множення випливають важливі формули:

1. Формула Бернуллі. Нехай результатом випробувань може бути поява однієї з двох незалежних протилежних подій. Нехай імовірність однієї з них (**А**) дорівнює **Р**, а другої (**А**) дорівнює q = 1 – Р. Тоді ймовірність того, що подія (**А**) з'явиться **m** раз в **n** випробуваннях, може бути обчислена за формулою:

$$P = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot P^m \cdot q^{n-m}, \text{ де } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ \ldots \ \cdot n.$$

2. Формула повної ймовірності. Нехай подія **А** може з'явитись тільки разом з однією із несумісних подій $\mathbf{B_i}$ (i = 1, 2, 3, ... , n), які утворюють повну групу подій. Нехай імовірність події **В** дорівнює $\mathbf{P(B_i)}$, а умовна ймовірність події **А** при умові, що відбулась подія $\mathbf{B_i}$, дорівнює $\mathbf{P(A/B_i)}$. Тоді безумовна ймовірність події може бути обчислена за формулою:

$P(A) = P(A \text{ і } B_i)$ або $(A; B_2)$ або $(A \text{ і } B_3)$ або ... або $(A \text{ і } B_n) =$

$P(A \text{ і } B_1) + P(A \text{ і } B_2) + ... + P(A \text{ і } B_n) =$

$$P(A/ B_1)\cdot P(B_1) + P(A / B_2)+...+P(A / B_n) \cdot P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) \cdot P(B_i).$$

У випадку, коли **n**=2, тоді $\mathbf{B_1}$ та $\mathbf{B_2}$ є **протилежними**. При цьому їх позначають **B** та $\overline{B}$. У цьому випадку формула повної ймовірності має вигляд $P(A) = P(B) \cdot P(A / B) + P(\overline{B}) \cdot P(A / \overline{B})$.

Інколи події $\mathbf{B_1}$**,** $\mathbf{B_2}$**, ... ,** $\mathbf{B_n}$ називають **гіпотезами**. У частковому випадку **n**=**2** гіпотези **B** і $\overline{B}$ **альтернативними гіпотезами** або просто **альтернативами**.

3. Формула Байєса. Все сказане у попередньому пункті про події **A** і **B** та їх імовірності залишаються у силі. Нехай умовна ймовірність події **Bj** умові, що подія **A** вже відбулася, дорівнює **P(Bj/A)**. Тоді ця ймовірність може бути обчислена за формулою:

$$P(Bj / A = \frac{P(A / Bj) \cdot P(Bj)}{P(A)} = \frac{P(A / Bj) \cdot P(Bj)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A / Bi) \cdot P(Bi)}.$$

У формулі ймовірності **P(Bj)** називають **апріорними**, а ймовірності **P(Bj/A)** – **апостеріорними**.

Приклади

Приклад 1.

За статистичними даними групу крові А мають 36,9% всіх європейців, групу В – 23,5%, групу АВ – 0,6%, групу 0 – 39%. Знайти ймовірність того, що у довільно взятого донора-європейця група крові А або В.

Розв'язання

Згідно до статистичного визначення ймовірностей Р(А)=0,369, Р(В) =0,235. Звідси

Р(А або В) = Р(А) + Р(В) = 0,369 + 0,235 = 0,604.

Приклад 2.

Медична сестра обслуговує в палаті чотирьох хворих. Імовірність того, що протягом години перший хворий зажадає уваги сестри – 0,2, другий – 0,3, третій – 0,25, четвертий – 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом години всі чотири хворих зажадають до себе уваги сестри.

Розв'язання

Р(А і В і С і D) = 0,2 · 0,3 · 0,25 · 0,1 = 0,0015.

Приклад 3.

Аптека одержує зі складу новокаїн, причому перевіркою встановлено, що в 98 випадках із 100 він є кондиційним. В 60 % кондиційних партій концентрація новокаїну дорівнює 1%. Знайти ймовірність того, що в черговій партії аптека одержить однопроцентний новокаїн.

Розв'язання.

Нехай подія **А** полягає в тому, що новокаїн кондиційний, а подія **В** – у тому, що він 1%-ний. Тоді Р (А) = 0,98; Р (В/А) = 0,60;

$$P(A \text{ і } B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}98 \cdot 0{,}60 = 0{,}59.$$

Приклад 4.

Під час епідемії в одному з населених пунктів 60% мешканців виявилися хворими. З кожних 100 хворих 10 потребують медичної допомоги. Знайти ймовірність того, що будь-якому навмання взятому мешканцю необхідна медична допомога.

Розв'язання

Подія **A** полягає в тому, що мешканець населеного пункту хворий, а подія **B** – в тому, що він вимагає термінової медичної допомоги. Тоді $P(A) = 0{,}60$; $P(B/A) = 0{,}10$;

$$P(A \text{ і } B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}60 \cdot 0{,}10 = 0{,}060.$$

Приклад 5.

Нехай є три хвороби $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ **і** $\mathbf{A_3}$, які важко розрізнити при встановленні діагнозу. Вони зустрічаються з частотами 50%, 40% і 10%. Існує метод лікування **B**, який приводить до успіху в залежності від хвороби відповідно в 70, 75 і 90 відсотків випадків. Визначити:

1) ймовірність успіху для пацієнта, який страждає однією (невідомо якою саме) із хвороб $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ або $\mathbf{A_3}$;
2) ймовірність хвороб $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ при успішному лікуванні методом **B**.

Розв'язання

$p(A_1) = 0{,}5$; $p(A_2) = 0{,}4$; $p(A_3) = 0{,}1$;

$p(B/A_1) = 0{,}7$; $p(B/A_2) = 0{,}75$; $p(B/A_3) = 0{,}9$.

1) за формулою повної ймовірності:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + p(A_3) \cdot p(B/A_3) =$$
$$0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}09 = 0{,}74.$$

2) за формулою Байєса:

$$p(A_1/B) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{0{,}74} = 0{,}47;\ p(A_2/B) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}75}{0{,}74} = 0{,}40;\ p(A_3/B) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}74} = 0{,}13.$$

Нормальний розподіл

Серед розподілів неперервних випадкових величин особливе місце займає нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Це пов'язано з тим, що, як показано у відповідних розділах теорії ймовірностей, випадкові величини, які формуються під дією багатьох факторів, з яких жоден не є визначним, має або нормальний розподіл, або розподіл, близький до нормального.

Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів розподілу, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при типових умовах, які зустрічаються дуже часто.

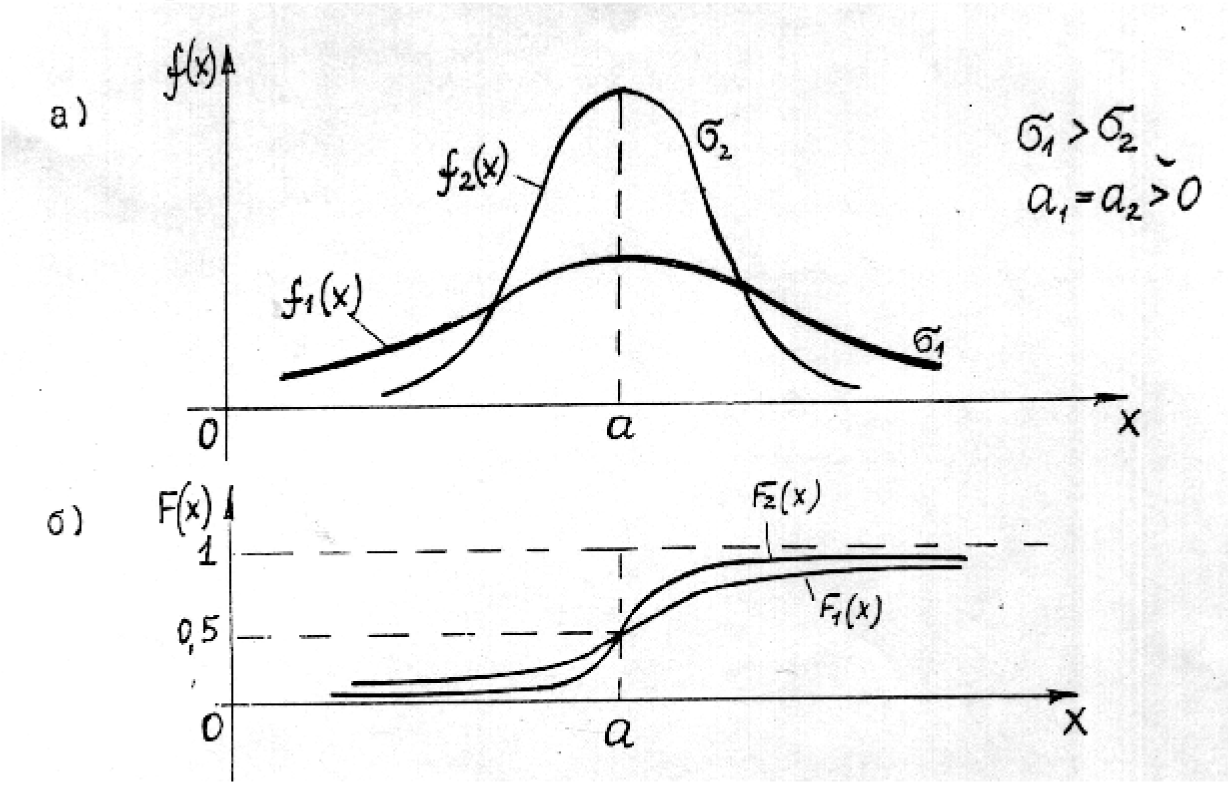
Якщо неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, її густина ймовірності описується формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де **a** і **σ** – деякі константи.

Можна показати, що для випадкової величини, яка має нормальний розподіл, $M(X) = a$; $D(X) = \sigma^2$; $\sigma(X) = \sigma$.

Графік цього розподілу має дзвіноподібну форму. Він симетричний відносно прямої **x = a** (мал. 7).



Мал. 7

При зміні **a** та постійному **σ** графік зміщується вздовж осі **x**, не змінюючись за формою. При зменшенні **σ** при постійному **a** графік стискується до прямої **x=a**, але площа під ним залишається завжди дорівнюючою **1**.

При необхідності знаходження значення ймовірності попадання величини **X**, яка має нормальний розподіл, в який-небудь інтервал інтегрують наведений вище вираз для **f(x)**. Цей інтеграл не може бути виражений через елементарні функції. У зв'язку з цим вводиться поняття функції Лапласа, яка дорівнює:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} dt$$

і для якої за допомогою чисельних методів складена таблиця значень. Легко показати, що, якщо **X** має нормальний розподіл, то

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

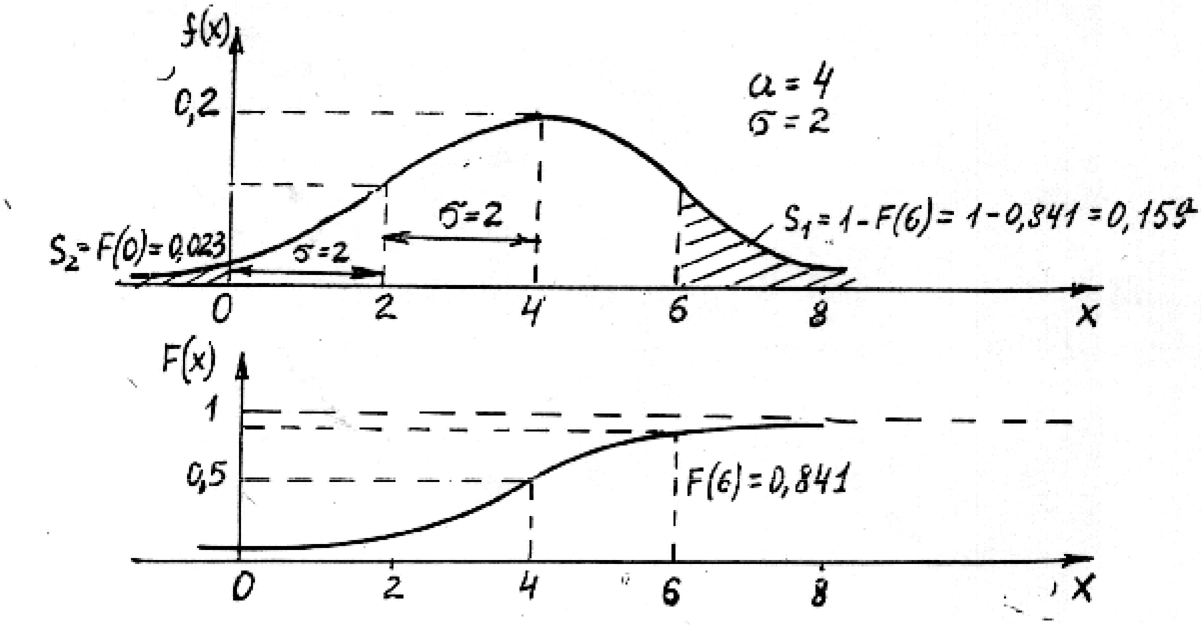
де t = (x – a)/σ.

Таким чином, обчислення ймовірностей попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал **$[x_1, x_2]$** зводиться до визначення **t_1** і **t_2** та знаходження за таблицею значень функції Лапласа **$\varphi(t_1)$** та **$\varphi(t_2)$**. Слід пам'ятати, що при **$x<a$** значення **t** буде від'ємним, а в таблиці значень функції Лапласа наведені значення $\varphi(t)$ тільки для додатних **t**. У цьому випадку треба використовувати властивість непарності функції Лапласа, тобто використовувати формулу $\varphi(-t) = -\varphi(t)$.

Функція розподілу **F(x)** нормально розподіленої випадкової величини (див. мал. 8) також не може бути виражена через елементарні функції, але її можна виразити через функцію Лапласа:

$$F(x) = 0,5 + \varphi(x).$$

Наведена формула дозволяє обчислити значення **F(x)**, використовуючи таблицю значень функції Лапласа.



Мал. 8

Закону Гаусса підкоряються:

- ✓ зріст і вага дорослих людей;
- ✓ верхній артеріальний тиск крові при дослідженні контингенту пацієнтів;
- ✓ довжина судин, розміри органів, вага та об'єм мозку, визначені при масових анатомічних дослідженнях;
- ✓ абсолютні похибки показів приладів, вимірів;
- ✓ зміст ферментів у здорових людей.

Наведені приклади складають незначну частину від усієї різноманітності випадкових біологічних величин, що підкоряються нормальному закону розподілу.

Приклади

Приклад 1.

Випадкова величина **X** має нормальний розподіл з параметрами **a=4**, **σ =2**. Визначити значення її функції розподілу при $\mathbf{x_1 = 6}$ та $\mathbf{x_2 = 0}$.

Розв'язання

Для того, щоб скористатися таблицею значень функції Лапласа, знайдемо $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$ за формулами:

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{6-4}{2} = 1;\ t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{0-4}{2} = -2.$$

За обчисленими значеннями $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$ знаходимо, що $\boldsymbol{\varphi(t_1)} = 0{,}341$, а $\boldsymbol{\varphi(t_2)} = -\varphi(2) = -0{,}477$. Тоді $F(6) = 0{,}5 + 0{,}341 = 0{,}841$; $P(0) = 0{,}5 - 0{,}477 = 0{,}023$.

Приклад 2.

Випадкова величина **X** має нормальний розподіл з параметрами **a = 2**, **σ = 4**. Визначити ймовірність того, що значення **X** лежать у межах інтервалу від **0** до **8**.

Розв'язання

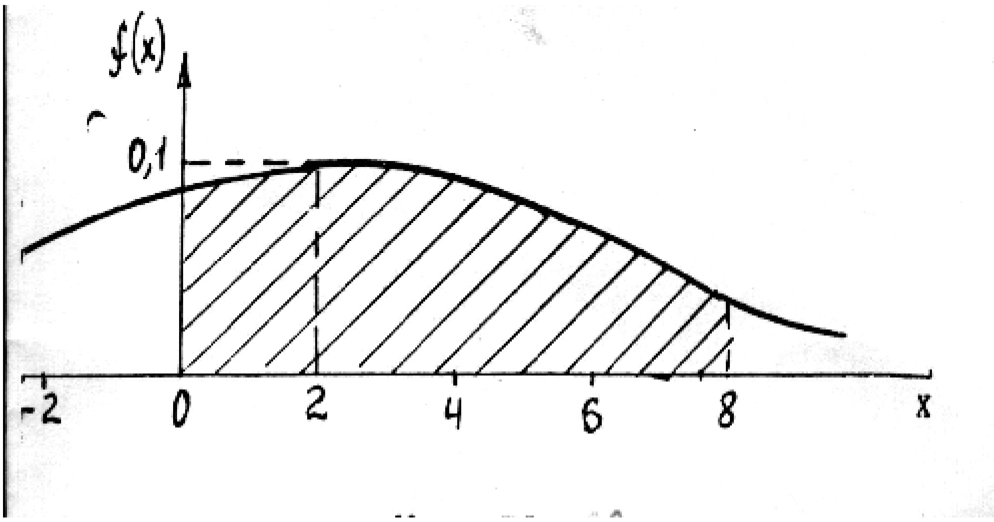
$$P(x_1 \le X \le x_2) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

$$\text{де: } t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{8-2}{4} = \frac{3}{2};$$

$$t_1 \frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{0-2}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}433;\ \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}191.$$

Тоді $P(0 \le X \le 8) = 0{,}433 - (-0{,}191) = 0{,}624$.



Мал. 9

7. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Основні поняття

Вивчення понять математичної статистики почнемо з поняття сукупності. **Сукупність** – це множина об’єктів (елементів сукупності), які мають загальну властивість. Число елементів сукупності називають **обсягом сукупності**.

Найбільша сукупність, що об’єднує всі елементи, які мають будь-яку властивість (властивість, наявність якої дозволяє віднести елементи до даної сукупності), називається **генеральною сукупністю**.

При вивченні сукупностей прагнуть визначити значення яких-небудь числових показників, які характеризують ці сукупності. Ці числові показники прийнято називати **статистичними характеристиками**. При оцінюванні статистичних характеристик за вибіркою існує дві проблеми: як знайти найкращу вибіркову оцінку характеристики, яку вивчають, і на скільки цій оцінці можна довіряти, тобто наскільки сильно значення оцінки може відрізнятися від істинного значення статистичної характеристики. Визначення значення оптимальної оцінки статистичної характеристики називається точковою оцінкою цієї характеристики, а побудова надійного інтервалу – надійною оцінкою.

Нехай при вивченні вибірки були одержані такі значення деякої випадкової величини **X** і $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n}$ (**n** – обсяг вибірки). Тоді оптимальною вибірковою оцінкою математичного сподівання величини **X** буде середнє вибіркове $(\overline{x})$, обчислене за формулою :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Тут чітко видно різницю між поняттями **“середнє значення”** та **“математичне сподівання”**. Термін “математичне сподівання” належить до генеральної сукупності та еквівалентний поняттю “середнє значення для генеральної сукупності”. Оптимальну вибіркову оцінку дисперсії величини **X – D(x)** обчислюють за формулою:

$$D(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}.$$

На практиці для розрахунку **D(x)** частіше використовують формулу:

$$D(x) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i-1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2 \cdot n\right)$$

Вибіркову оцінку середнього квадратного відхилення величини **X – S(x)** знаходять за формулою S(x) = $\sqrt{D(x)}$**.** Враховуючи, що D(x) = S^2(x), для позначення вибіркової оцінки дисперсії часто замість **D(x)** використовують

$\mathbf{S^2}$. Для характеристики величини відхилення значень випадкової величини разом з **D(x)** і $\mathbf{S^2(x)}$ часто використовують таку величину, як похибка середнього $\mathbf{S_{\bar{x}}}$. Її також часто позначають $\mathbf{m_x}$ (стандартна похибка). Ця величина знаходиться за формулою $\mathbf{m_x}=\dfrac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{n}}}$. Оцінка статистичної характеристики, знайдена за вибіркою, є випадковою, і її відхилення від істинного значення статистичної характеристики може бути як завгодно великим. Тому не можна ставити питання про визначення границь інтервалу, в який істинне значення статистичної характеристики попадає вірогідно, а можна лише розв'язувати задачу визначення інтервалу, в який істинне значення попадає з якоюсь імовірністю $\boldsymbol{\alpha}$, яка нас влаштовує. Такий інтервал називають надійним інтервалом. **Надійний інтервал** – це випадковий інтервал, що повністю визначається результатами дослідів і не залежить від невідомих характеристик, який із заданою імовірністю α накриває невідому статистичну характеристику.

Для обчислення границь надійного інтервалу для математичного сподівання нормально розподіленої величини **X** можуть бути використані різні формули в залежності від того, відомо чи невідомо значення дисперсії **D(x)**. Якщо **D(x)** відома, то надійний інтервал для **M(x)** обчислюється за формулою:

$$\bar{x}-t(\alpha)\sqrt{\frac{D(x)}{n}} \le M(x) \le \bar{x}+t(\alpha)\sqrt{\frac{D(x)}{n}}\text{, де}$$

$\bar{x}$ – середнє вибіркове, **n** – обсяг вибірки, а величина $t(\alpha)$ за таблицями значень функції Лапласа, виходячи з умови, що $\varphi(t)=\alpha/2$. У медико-біологічних дослідженнях звичайно приймається $\alpha = 0{,}95$. У цьому випадку $t(\alpha) = 0{,}96$.

Якщо дисперсія **D(x)** невідома, при визначенні надійного інтервалу для M(x) використовують формулу:

$$\bar{x}-t(\alpha,\ k)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} \le M(x) \le \bar{x}+t(\alpha,\ k)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},$$

де **S** – вибіркова оцінка середнього квадратичного відхилення, **k = n–1** – число ступенів вільності, а $\mathbf{t(\alpha,k)}$ – коефіцієнт Ст'юдента на перетині стовпчика, що відповідає необхідному значенню α (або **P**) та рядка із знайденим значенням **k**. Наприклад, при P = 0,05 та k = 20 $t(\alpha,k) = 2{,}09$.

На практиці часто зустрічаємося з задачею, коли маємо дві вибірки, одержані при різних умовах (наприклад, на елементи однієї вибірки діяв якийсь фактор, а на елементи другої – ні), виявляються різними значення середніх вибіркових і необхідно з'ясувати, чи є ці відмінності чисто випадковими, чи вони являють собою результат дії згаданих різних умов одержання вибірок. Для відповіді на це питання обчислюються величини **k**, H, T. $k = n_1 + n_2 - 2$, $H = (n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2$,

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 \cdot k}{(k+2)H}} \cdot \left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|, \text{ де}$$

k – число ступенів свободи;
n_1, n_2 – обсяги вибірок, які порівнюються;
S_1 та **S_2** – вибіркові оцінки середніх квадратичних відхилень першої та другої вибірок відповідно;
$\overline{X}_1$ та **$\overline{X}_2$** – середні вибіркові.

Після цього за таблицею значень коефіцієнтів Ст’юдента для обчисленого значення **k** та необхідного **P** визначають значення коефіцієнта Ст’юдента **t**.

Якщо $T \geq t$ то можна казати, що різниця середніх вибіркових вірогідна, тобто вона не може бути пояснена чисто випадковими факторами і є наслідком відмінності генеральних сукупностей, з яких відбиралися вибірки.

Якщо $T < t$ – різниця не є вірогідною.

Якщо об’єми двох вибірок великі і приблизно рівні між собою, то для обчислення **T** можна використовувати більш просту формулу $T = \dfrac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{m_2^1 + m_2^2}}$,

де **m_1** і **m_2** – помилки середніх для першої та другої вибірок відповідно. Розглянуту оцінку можна застосовувати лише тоді, коли величини X_1 та X_2 мають нормальний розподіл та їх дисперсії рівні.

Оцінка достовірності результатів прямих вимірів

При прямих вимірюваннях похибки можуть бути пов’язані як із нестабільністю (випадковим характером) вимірюваної величини, так і з засобами, які використовуються для вимірювання.

Математичний алгоритм даного методу включає наступні дії:

Обчислення середнього арифметичного:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

2. Обчислення середнього квадратичного відхилення величини X – S(x):

$$S(x) = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n - 1}}.$$

3. Обчислення стандартної похибки:

$$m = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} .$$

4. Визначають точність прямого виміру: $\Delta m = t\,(P, k)^m$, де

t (P, k) – коефіцієнт Ст’юдента на перетині стовпчика, що відповідає необхідному значенню α або **P** та рядка із знайденим **k**; **k = n – 1**. У медичній практиці використовують значення P = 0,99 для важливих досліджень, у всіх інших випадках 0,95.

5. Точне значення вимірюваної величини $X = \overline{X} \pm \Delta m$.
   Даний вираз показує, що середнє значення досліджуючого параметру генеральної сукупності не вийде за межу інтервалу $\overline{X} - \Delta m < x < \overline{X} + \Delta m$.

Обробка результатів непрямих вимірювань

Якщо шукана величина **y** обчислюється за формулою $y = f(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$, то дійсне значення цієї величини **(y_g)** може бути визначеним за формулою:

$$y_g = f(x_{1g}, x_{2g}, x_{3g} \ldots\ x_{ng}),\text{ де}$$

$\mathbf{x_{1g}, x_{2g}, x_{3g} \ldots\ x_{ng}}$ – дійсні значення величини $\mathbf{x_1, x_2, x_3 \ldots\ x_n}$.

Для визначення абсолютної похибки (Δy) може бути використана формула $\Delta y = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_{1g}, x_{2g}, \ldots x_{ng})}{\partial X_i} \cdot \Delta X_i\right)^2}$,

де $\frac{\partial f((x_{1g}, x_{2g}, x_{3g} \ldots\ x_{ng})}{\partial x_i}$ – часткова похідна від **y** по $\mathbf{x_i}$, що обчислена при $x_1 = x_{1g}$, $x_2 = x_{2g}$, ... $x_n = x_{ng}$;

ΔX_i – абсолютна похибка величини $\mathbf{X_i}$, яка вираховується за правилами, описаними раніше.

На практиці часто визначають спочатку відносну похибку величини $\partial y = \frac{\Delta y}{y}$ за формулою $\partial y = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_{1g}, x_{2g}, \ldots x_{ng})}{\partial X_i} \cdot \Delta X_i\right)^2}$, а абсолютну похибку величини **y** визначають як добуток відносної похибки на дійсне значення, тобто $\Delta y = y_g \cdot \frac{\Delta y}{y}$, або $\Delta y = \partial y \cdot y_g$.

Наведені у цьому розділі формули застосовуються при обробці результатів вимірювань тільки в тому випадку, якщо похибки $\Delta x_i, \Delta x_2, \Delta x_3 \ldots, \Delta x_n$ не дуже великі в порівнянні з $\Delta x_{i\partial}, \Delta x_2, \Delta x_{3\partial} \ldots, \Delta x_{n\partial}$. У противному разі непрямі вимірювання розглядаються як окремий випадок сумісних вимірювань і обчислюються за іншими правилами.

Оцінка достовірності результатів дослідження двох незалежних сукупностей

Подібна задача дуже часто зустрічається в медичній практиці. Використовуючи даний метод, можна встановити, визнана різниця двох незалежних сукупностей випадковим фактором або обумовлена якою-небудь зовнішньою дією (лікувальною).

Нехай дві незалежні сукупності: дослідна група x_1, x_2, x_3... x_{n1}, контрольна група y_1, y_2, y_3... y_{n2}, де n_1 і n_2 – обсяги вибірок першої і другої групи.

Достовірність результатів в цих групах оцінюють за наступним алгоритмом:

1. Обчислюють середнє арифметичне значення для першої і другої групи: $\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$; $\overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$.
2. Обчислюють середнєквадратичне відхилення вимірів у групах:
$$S(x) = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2}{n_1 - 1}}\ ;\ S(y) = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - Y)^2}{n_2 - 1}}.$$
3. Обчислюють стандартні похибки:
$$m_1 = \frac{S(x)}{\sqrt{n_1}}\ ;\ m_2 = \frac{S(y)}{\sqrt{n_2}}.$$
4. Знаходять абсолютне значення різниці середніх арифметичних дослідної і контрольної груп:
$$d = \left|\overline{X} - \overline{Y}\right|.$$
5. Обчислюють середню похибку різниці за формулою:
$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}.$$
6. Визначають критерії достовірності різниці:
$$t_d = \frac{d}{m_d} \to t_d = \frac{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}.$$
7. Знаходять число ступенів свободи:
$$k = n_1 + n_2 - 2.$$
8. Із таблиці для числа ступенів свободи **k** знаходять значення трьох стандартних критеріїв Ст'юдента. $\mathbf{t_{st}}$, відповідно для трьох значень достовірності 95; 99; 99,9%.
9. Порівнюють критерій Ст'юдента $\mathbf{t_d}$ з найденими значеннями $\mathbf{t_{st}}$ 95%, $\mathbf{t_{st}}$ 99%, $\mathbf{t_{st}}$ 99,9%:

а) якщо буде, що $\mathbf{t_d} < \mathbf{t_{st}}$ 95%, вибіркова різниця недостовірна, різниця в вибірці випадкова;

б) якщо буде, що $\mathbf{t_{st}}\,99\% \le \mathbf{t_d} \le \mathbf{t_{st}}\,99{,}9\%$, вибіркова різниця достовірна з ймовірністю 99%;

в) якщо буде, що $\mathbf{t_d} \ge \mathbf{t_{st}}$ 99,9%, вибіркова різниця достовірна з ймовірністю 99,9%.

Стандартні значення критерію Ст'юдента $\mathbf{t_{st}}$ дані в таблиці.

Кореляційний аналіз

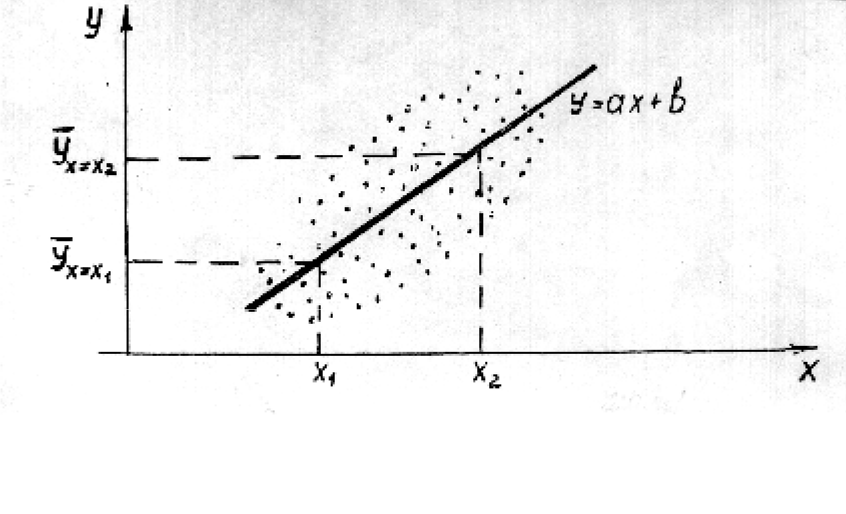
Даний метод використовується при необхідності встановити зв'язок між двома залежностями і визначити її достовірність. У медичній практиці така залежність зустрічається найчастіше.

Функціональна залежність може існувати і між випадковими величинами y = f(x). Для повного опису функціональної залежності між випадковими величинами треба знайти закон розподілу випадкової величини – функції (закон розподілу аргументу є заданим). У загальному випадку ця задача може бути досить – таки складною.

Між випадковими величинами **X** і **Y** може існувати більш загальна кореляційна залежність. Вона полягає у тому, що кожному значенню **X** відповідає визначений закон розподілу величини **Y** (а не просто визначене значення **Y**).

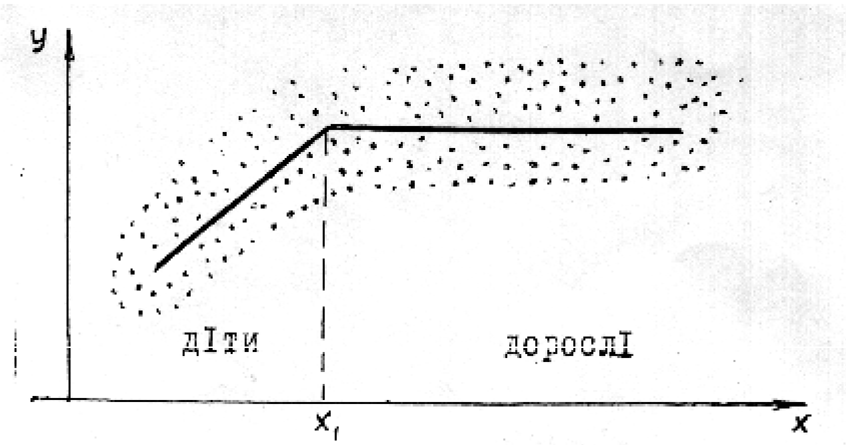
Неповну (але важливу) інформацію про кореляційну залежність дає знання математичного сподівання випадкової величини **Y** при кожному **X** – умовного математичного сподівання $M(\frac{Y}{X})$, яке є функцією **X**, тобто $M(\frac{Y}{X})=$ f(x). Ця функція називається **функцією регресії Y** на **X**. Крива y = f(x) називається лінією регресії. Коефіцієнти, які є у виразі для **f(x)**, називаються **коефіцієнтами регресії**.

Зупинимося на проблемі розпізнання та опису кореляційної залежності за результатами експерименту. Існує генеральна сукупність, елементи якої мають дві кількісні ознаки. Потрібно дослідним шляхом встановити, чи є між цими ознаками залежність, і описати її, якщо вона існує. З генеральної сукупності робиться вибірка обсягу **n**. У кожного елемента вибірки виміряють ознаки **X** і **Y** та одержують вихідні експериментальні дані, що являють собою набір з **n** пар чисел $x_1\,y_1$; $x_2\,y_2$ ... $x_n\,y_n$. Крапки з координатами $\mathbf{X_i}$ $\mathbf{У_i}$ наносять на координатну площину **(xoy)** і одержують так зване **кореляційне поле**. Якщо поле має вигляд, мал. 1, то між **X** і **Y** є позитивний кореляційний зв'язок. Функція регресії **Y** на **X** є зростаючою лінійною функцією, має вигляд **y = ax + b**, а її графік є пряма лінія (мал. 10).



Мал. 10

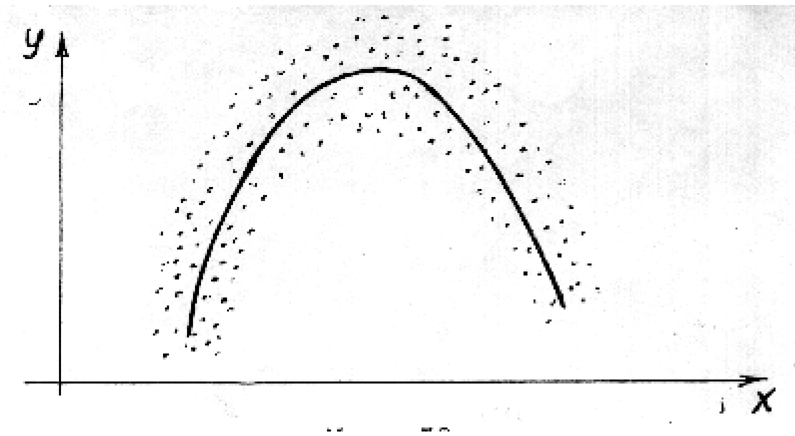
Це дуже важливий випадок лінійної кореляції. Коефіцієнт регресії **a** і **b** треба підібрати особливим чином за формулами. Кореляційне поле може мати такий вигляд. Це буде поле залежності зросту від віку. Повноліття настає при значеннях $\mathbf{X_i}$, які відповідають вигину кореляційного поля (мал.11).



Мал. 11

Зрозуміло, що лінія регресії **Y** на **X** може бути подана двома відрізками прямих (зростаючої – для дітей і горизонтальної – для дорослих).

Якщо кореляційне поле має вигляд (мал. 12), то тут маємо нелінійну кореляцію, лінія регресії близька до параболи: $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$. Коефіцієнти **a**, **b**, c треба підібрати так, щоб парабола проходила усередині кореляційного поля.



Мал. 12

Для аналізу можна використовувати і іншу функцію регресії – функцію регресії **X** на **Y**, тобто функціональну залежність умовного середнього $\overline{X}_y$ від **y**. Тут, начебто**,** міняються місцями залежна і незалежна змінні.

Визначимо, що дві функції регресії **Y** на **X** і **X** на **Y** не є взаємозворотними. Вони стають зворотними тільки для випадку функціональної залежності **X** і **Y**.

Лінійна регресія в медичній практиці використовується досить часто. Якщо величини **X** і **Y** мають нормальний розподіл Гаусса, то можна обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції за формулою:

$$R=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{(n-1)S(x)\cdot S(y)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)\cdot(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2)}},$$

де

$\overline{x},\overline{y}$ – середні вибіркові;

S(x) і **S(y)** – вибіркові оцінки середніх квадратичних відхилень. Значення **R** завжди містяться у межах $-1 \le R \le +1$. Причому, чим більше точки кореляційного поля групуються навколо деякої прямої, тим величина **R** ближче до одиниці. І чим більше кореляційне поле приймає вигляд круга (коли не можна виділити ніякого особливого напрямку), тим величина **R** ближче до нуля. У першому випадку кажуть про сильну кореляційну залежність, у другому – про слабку. При **R = 0** випадкові величини не корелюють.

Коефіцієнти **a і b** розраховують по формулам, які одержані за методом найменших квадратів:

$$a = R\frac{S(y)}{S(x)};\ b=\overline{Y}-a\overline{X}.$$

Після цього можна записати рівняння регресії **Y** на **X** у вигляді:

$$y-\overline{Y}=R\frac{S(y)}{S(x)}(x-\overline{X}),$$

а рівняння регресії $x-\overline{X}=R\dfrac{S(x)}{S(y)}(y-\overline{Y})$.

При **R>0** обидві функції є зростаючими, а при **R<0** обидві функції є спадаючими. У граничних випадках $R=\pm 1$ кореляційна залежність переходить у функціональну, і обидва рівняння регресії переходять в одне рівняння:

$$S(x)\cdot(y-\overline{Y})=S(y)\cdot(x-\overline{X})$$

При відсутності кореляційної залежності **R = 0** і рівняння регресії **Y** на **X** приймає вигляд $y=\overline{Y}$, а рівняння регресії **X** на **Y** приймає вигляд $x=\overline{X}$.

Кореляційний аналіз двох випадкових величин

Нехай виконано вимірювання двох випадкових величин:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n.$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots y_n.$$

Необхідно встановити зв’язок між двома величинами $\overline{X}$ і $\overline{Y}$, якщо зв'язок є, то яка глибина і достовірність його.

Алгоритм дії даного методу:

1.Обчислюємо середнє арифметичне значення двох ознак:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i-1}^{n} X_i}{n}; \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}.$$

2. Обчислюємо відхилення кожного значення x від $\overline{X}$:

$$\Delta x_1 = x_1 - \overline{X}$$
$$\Delta x_2 = x_2 - \overline{X}$$
$$\Delta x_3 = x_3 - \overline{X}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta x_n = x_n - \overline{X}.$$

та **у** від $\overline{Y}$:

$$\Delta y_1 = y_1 - \overline{Y}$$
$$\Delta y_2 = y_2 - \overline{Y}$$
$$\Delta y_3 = y_3 - \overline{Y}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta y_n = y_n - \overline{Y}.$$

3. Обчислюємо суму добутку відхилень: $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i$.

4. Обчислюємо максимальну суму: $S_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2}$.

5. Визначаємо коефіцієнт кореляції: $R = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2}}$.

6. Глибина кореляційного зв'язку визначається за наступними критеріями:
   якщо $0 < R < 0,3$, зв'язок слабкий;
   якщо $0,3 < R < 0,5$, зв'язок помірний;
   якщо $0,5 < R < 0,7$, зв'язок значний;
   якщо $0,7 < R < 0,9$, зв'язок сильний;
   якщо $0,9 < R < 1$, зв'язок дуже сильний.

7. Обчислюємо середню похибку коефіцієнта кореляції: $m_k = \sqrt{\frac{1 - R^2}{n - 2}}$.

8. Визначаємо критерії достовірності коефіцієнта кореляції: $t_R = \dfrac{R}{m_k}$.
9. За таблицею 3, для числа ступенів вільності k = 2n–2 визначаємо стандартні значення коефіцієнта Ст'юдента, що відповідає трьом значенням достовірності: 95, 99, 99,9%.
10. Порівнюємо критерій достовірності коефіцієнта кореляції з стандартними значеннями критеріїв Ст'юдента і робимо висновок про достовірність коефіцієнта кореляції.

Елементи дисперсійного аналізу

Дисперсійний аналіз – це метод математичної статистики, що використовується при необхідності перевірки вірогідності впливу будь-якого фактору (факторів) на досліджуваний кількісний показник. Метод є чітко обгрунтованим тільки тоді, коли досліджуваний показник є нормально розподіленою випадковою величиною. Однак його використовують завжди, коли немає серйозних підстав вважати, що закон розподілу цього показника істотно відрізняється від нормального.

У відповідності до числа факторів, вплив яких вивчається, відрізняють одно-, дво-, три- і т.д. – **факторний дисперсійний аналіз**.

Розглянемо випадок однофакторного дисперсійного аналізу, який найчастіше зустрічається на практиці. Фактори можуть бути як **кількісні** так і **якісні**. Такі задачі приходиться розв'язувати в фармакотерапії захворювань, коли визначається ефективність лікування від дози препарату (кількісний фактор) або залежність від виду препарату (якісний фактор). Кожний фактор має декілька рівнів, які потім розбиваються на числові інтервали.

Дія фактора оцінюється за критерієм Фішера: відношенням факторної дисперсії **($Д_ф$)** результатів експериментального визначення параметра **x** при дії фактора до **випадкової дисперсії ($Д_в$)** до результатів визначення випадкового параметра **X** без впливу фактора: $F = \dfrac{Д_ф}{Д_в}$, якщо факторна дисперсія буде менше випадкової, то немає необхідності користуватись критерієм Фішера. Тут і так очевидно, що вплив фактору не веде до змін результату і впливом фактору можна знехтувати.

Якщо F≥1, одержані результати критерію Фішера порівнюють із **$F_{кр}$.** критичними значеннями, таблиця яких приведена в додатку. В ній позначена ймовірність того, що спостерігаєми варіанти **X** визначаються випадковими процесами. В додатку, наприклад, вказано, що за рахунок випадкових явищ можна одержати F = 2,25 з імовірністю 10%, а з імовірністю 0,1% одержати F = 6,25.

Гранично допустимі значення ймовірності, починаючи з яких можна вважати, що різниця значень **x** пов'язана з впливом **Ф**(тобто є значною) називається **рівнем значності**.

В біології і медицині прийнято вважати, якщо $\alpha<1\%$, то вплив **Ф** суттєвий, якщо ймовірність знаходиться в межі 1 до 5%, тоді вплив фактору **Ф** підлягає сумніву. Якщо $\alpha>5\%$, то фактор **Ф** не впливає на величину **X**.

В техніці вимоги до рівнів значимості не такі суворі. В більшості випадків вплив фактора **Ф** вважається значним при $\alpha<2{,}5\%$.

Основною задачею однофакторного дисперсійного аналізу є вияснення впливу фактора **Ф** на величину **X**.

Математичний алгоритм дії:

1. Загальне середнє значення $\overline{\mathbf{X}}$**заг.**:

$$\overline{X}_{заг.} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\gamma=P} \sum\limits_{i=1}^{i=g} Xi\gamma}{P \cdot g}.$$

2. Загальна сума квадратів відхилень спостерігаючих значень **X** від загального середнього $S\ заг. = \sum\limits_{\gamma=1}^{P} \sum\limits_{i=1}^{g} (Xi\gamma - \overline{X}_{заг.})^2$.

3. Групове середнє значення (середнє значення в стовпчику):

$$X_{стовпчик\ \gamma} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{g} Xi\gamma}{g}.$$

4. Факторна сума квадратів відхилень групових середніх значень від загального значення. Факторна сума характеризує варіацію між групами (стовпчиками значень):

$$S_{ф} = g \sum_{\gamma=1}^{P} (X_{стовпчика\ \gamma} - \overline{X}_{заг.})^2.$$

5. Випадкова сума квадратів відхилень спостерігаючих значень від свого групового середнього. Випадкова сума характеризує варіацію даних в середині групи (стовпчиків значень):

$$Sc = \sum_{\gamma=1}^{P} \sum_{i=1}^{g} (X_{i\gamma} - \overline{X}_{стовпчика})^2.$$

На практиці випадкову суму квадратів находять за формулою:

$$Sc = Sзаг. - Sф.$$

Для обчислення Sзаг. і Sф. використовують формули:

$$Sзаг. = \sum_{\gamma=1}^{P} \sum_{i=1}^{g} Xi\gamma - \frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{P} (\sum\limits_{i=1}^{g} Xi\gamma)^2}{P};$$

$$S_{ф.} = \frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{P}(\sum\limits_{i=1}^{g} Xi\gamma)^2}{g} - \frac{(\sum\limits_{\gamma=1}^{P}(\sum\limits_{i=1}^{g} Xi\gamma)^2}{P \cdot g}.$$

Обчислив випадкову і факторну суму квадратів, вичисляємо Дф. і випадкову Дс. дисперсії:

$$Дф.=\frac{S_{ф.}}{P-1};\ Дс. = \frac{S_{c.}}{P(g-1)}$$ і по формулі $F = \frac{Д_{ф.}}{Д_{с.}}$ критерій Фішера.

Приклад

Результати досліджень частоти пульсу людини в стані бадьорості та під впливом різних фаз навіяного сну (гіпнозу):

Функціональний стан	**Бадьорість**	**Неглибокий сон (на початку гіпнозу)**	**Глибокий сон (на висоті гіпнозу)**
Значення частоти пульсу	76; 73; 68; 83	71; 62; 55; 68	46; 59; 54

Треба встановити, чи свідчать дані про наявність залежності між частотою пульсу і різними фазами гіпнозу.

Розв'язання

1. Визначаємо загальну середню частоти пульсу **X**:

$$\overline{X} = \frac{1}{11}(76 + 73 + 68 + 83 + 71 + 62 + 55 + 68 + 46 + 59 + 54) = 65.$$

2. Знаходимо загальне розсіювання **Z**:

$$Z = (76 - 65)^2 + (73 - 65)^2 + (68 - 65)^2 + \ldots = 1190.$$

3. Визначаємо групові середні:

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{4}(76 + 73 + 68 + 83) = 75.$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{4}(71 + 62 + 55 + 68) = 64.$$

$$X_3 = \frac{1}{3}(46 + 59 + 54) = 53.$$

4. Знаходимо факторіальне розсіювання $\mathbf{Z_2}$:

$$Z_2 = 4(75 - 65)^2 + 4(64 - 65)^2 + 3(53 - 65)^2 = 836.$$

5. Знаходимо випадкове розсіювання $\mathbf{Z_1}$:

$$Z_1 = 1190 - 836 = 354.$$

6. Визначаємо факторіальну (міжгрупову) та випадкову (внутрішньогрупову) дисперсію:

$$S_2^2 = \frac{836}{3-1} = 418, S_1^2 = \frac{354}{11-3} = 44{,}3.$$

7. Знаходимо відношення дисперсій $Fe = \frac{S_2^2}{S_1^2}$, тобто розраховуємо експериментальне значення F-критерію:

$$Fe = \frac{418}{44,3} = 9,44.$$

За таблицею F-розподілу для числа ступенів свободи чисельника k–1=3–1=2 та числа ступенів свободи знаменника N–k=11–3=8 знаходимо значення F-критерію Fт = 4,5. Оскільки Fe=9,44>Fт, робимо висновок. що частота пульсу людини з імовірністю 0,95 залежить від фаз навіяного сну.

ДОДАТКИ

Таблиця значень функції Лапласа

t	(t)	t	(t)	t	(t)
0,00	0,0000	1,00	0,3413	2,00	0,47725
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,05	0,47981
0,10	0,0398	1,10	0,3643	2,10	0,48214
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,15	0,48422
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,20	0,48610
0,25	0,0987	1,25	0,3944	2,25	0,48778
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,30	0,48928
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,35	0,49061
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,40	0,49180
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,45	0,49286
0,50	0,1915	1,50	0,4332	2,50	0,49379
0,55	0,2088	1,55	0,4394	2,55	0,49461
0,60	0,2257	1,60	0,4452	2,60	0,49534
0,65	0,2422	1,65	0,4505	2,70	0,49653
0,70	0,2580	1,70	0,4554	2,80	0,49744
0,75	0,2734	1,75	0,4599	2,90	0,49813
0,80	0,2881	1,80	0,4641	3,00	0,49865
0,85	0,3023	1,85	0,4678	4,00	0,499968
0,90	0,3159	1,90	0,4713	5,00	0,49999997
0,95	0,3289	1,95	0,4744		

Таблиця значень коефіцієнта Ст'юдента

α / k	0,95	0,99	0,999
2	4,303	9,925	31,598
3	3,182	5,841	12,924
4	2,776	4,604	8,610
5	2,571	4,032	6,869
6	2,447	3,707	5,959
7	2,365	3,499	5,408
8	2,306	3,355	5,041
9	2,262	3,250	4,781
10	2,228	3,169	4,587
12	2,179	3,055	4,318
14	2145	2,977	4,140
16	2,120	2,921	4,015
18	2,101	2,878	3,922
20	2,086	2,845	3,850
22	2,074	2,819	3,792
24	2,064	2,797	3,745
26	2,056	2,779	3,707
28	2,048	2,763	3,674
30	2,042	2,750	3,646
40	2,021	2,704	3,551
60	2,000	2,660	3,460
120	1,980	2,617	3,373
∞	1,960	2,576	3,291

Таблиця значень критерію Фішера (F-розподілу)

№ 1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**40**	**60**
2	19.0 99.0	19.2 99.2	19.3 99.3	19.3 99.3	19.3 99.3	19.3 99.4	19.4 99.4	19.4 99.4	19.4 99.4	19.5 99.5	19.5 99.5	19.5 99.5
3	9.5 30.8	9.3 29.5	9.1 28.7	9.0 28.2	8.9 27.9	8.9 27.7	8.9 27.5	8.8 27.4	8.8 27.2	8.7 26.7	8.6 26.4	8.6 26.3
4	6.9 18.0	6.6 16.7	6.4 16.0	6.3 15.5	6.2 15.2	6.1 15.0	6.1 14.8	6.0 14.7	6.0 14.6	58 14.0	5.7 13.8	5.7 13.7
5	5.8 13.3	54 12.1	5.2 11.4	5.1 11.0	4.9 10.7	4.9 10.5	4.8 10.3	4.8 10.2	4.7 10.1	4.6 9.6	4.5 9.3	4.4 9.2
6	5.1 10.9	4.8 9.8	4.5 9.2	4.4 8.8	4.3 8.5	4.2 8.3	4.2 8.1	4.1 8.0	4.1 7.8	3.9 7.4	3.8 7.1	3.7 7.1
7	4.7 9.6	4.4 8.5	4.1 7.6	4.0 7.5	3.9 7.2	3.8 7.0	3.7 6.8	3.7 6.7	3.6 6.6	3.4 6.2	3.3 5.9	3.3 5.8
8	4.5 8.6	4.1 7.6	3.8 7.0	3.7 6.6	3.6 6.4	3.5 6.2	3.4 6.0	3.4 5.9	3.3 5.8	3.1 5.4	3.0 5.1	3.0 5.0
9	4.3 8.0	3.9 7.0	3.6 6.4	3.5 6.1	3.4 5.8	3.3 5.6	3.2 5.5	3.2 5.4	3.1 5.3	2.9 4.8	2.8 4.6	2.8 4.5
10	4.1 7.6	3.7 6.6	3.5 6.0	3.3 5.6	3.2 5.4	3.1 5.2	3.1 5.1	3.1 4.9	3.0 4.9	2.8 4.4	2.7 4.2	2.6 4.1
20	3.5 5.9	3.1 4.9	2.8 4.4	2.7 4.1	2.6 3.9	2.5 3.7	2.5 3.6	2.4 3.5	2.4 3.4	2.1 2.9	2.0 2.7	2.0 2.6
40	3.2 5.2	2.8 4.3	2.6 3.8	2.5 3.5	2.3 3.3	2.3 3.1	22 3.0	2.1 2.9	2.1 2.8	1.8 2.4	1.7 2.1	1.6 2.0
60	3.2 4.5	2.7 4.1	2.5 3.7	2.4 3.3	2.3 3.1	2.2 3.0	2.1 2.8	2.0 2.7	2.0 2.6	1.8 2.2	1.7 1.9	1.6 1.8

Примітка: верхній рядок – при **α = 0,95**, нижній – при **α = 0,99**.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лобоцкая Н.Я., Морозов Ю.В. Дунаев А.А. Высшая математика. -Минск: Высшая школа, 1987, -319 с.
2. Минцер О.П., Угаров Б.Н., Власов В.В. Методы обработки медицинской информации. - Киев: Вища школа, 1982.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. -М.: Наука, 1978, -575с.
4. Ремизов А.Н. Курс физики, электроники и кибернетики для медицинских институтов. -М.: Высшая школа, 1982, 562-602 с.
5. Ливенцев Н.М. Курс физики. -М.: Высшая школа, 1978, с.282-332.
6. Суворов И.Ф. Курс высшей математики. -М.: Высшая школа, 1967, 407 с.
7. Вантцель Е.С. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1969. –576 с.
8. Урбах В.Ю. Математическая статистика для биологов и медиков. -М.: Наука, 1963. - 323 с.
9. Пахомов В.Н., Книгавко В.Г., Клименко В.С., Зайцева О.В. Элементы теории вероятностей. Харьков, 1991, -28 с.

ЗМІСТ

Передмова 4
1. Функція.. 5
2. Похідна. Механічний та геометричний зміст похідної 10
3. Диференціал функції 19
4. Диференціальні рівняння 31
5. Математична обробка результатів вимірювання. Обчислення похибок 39
6. Основи теорії ймовірності 45
7. Елементи математичної статистики... 53
8. Додатки 66
9. Список літератури.. 68